Durée : 3 heures

Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie septembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

On rappelle que la probabilité d'un évènement A sachant que l'évènement B est réalisé se note $p_B(A)$.

Une urne contient au départ 30 boules blanches et 10 boules noires indiscernables au toucher.
On tire au hasard une boule de l'urne :

- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules blanches supplémentaires.
- si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.
On note :

- B_1 l'évènement : « on obtient une boule blanche au premier tirage »
- B_2 l'évènement : « on obtient une boule blanche au second tirage »
- A l'évènement : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

1. Dans cette question, on prend $n = 10$.

a. Calculer la probabilité $p(B_1 \cap B_2)$ et montrer que $p(B_2) = \dfrac{3}{4}$.

b. Calculer $p_{B_2}(B_1)$.

c. Montrer que $p(A) = \dfrac{3}{10}$.

2. On prend toujours $n = 10$.
Huit joueurs réalisent l'épreuve décrite précédemment de manière identique et indépendante.
On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'évènement A.

a. Déterminer $p(X = 3)$. (On donnera la réponse à 10^{-2} près).

b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

3. Dans cette question n est un entier supérieur ou égal à 1.
Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $p(A) = \dfrac{1}{4}$?

EXERCICE 2 **5 points**

On donne la propriété suivante :
« par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

Sur la figure donnée en annexe, on a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.
On a placé :

les points I et J tels que $\overrightarrow{\text{BI}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{EJ}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{EH}}$.
le milieu K de [IJ].

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).

Partie A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F.
En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.

2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).
3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).
4. **a.** Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.
   b. En déduire que les points F, P et K sont alignés.

Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A}~;~\overrightarrow{\text{AB}},~\overrightarrow{\text{AD}},~\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB).
On note $(x~;~y~;~0)$ les coordonnées du point N.

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J.
2. **a.** Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).
   b. Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{\text{G}N}\cdot\overrightarrow{\text{FI}}$ et $\overrightarrow{\text{G}N}\cdot\overrightarrow{\text{FJ}}$ en fonction de x et y.
   c. Déterminer les coordonnées du point N.
3. Placer alors le point P sur la figure en annexe.

EXERCICE 3 **5 points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n non nul,

$$x_{n+1}-x_n=0,24x_{n-1}.$$

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n=\lambda^n$.
   Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2-\lambda-0,24=0$.
   En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).
   On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :
   $$u_n=\alpha(1,2)^n+\beta(-0,2)^n \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$
2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
   Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0=6$ et $u_1=6,6$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=\dfrac{39}{7}(1,2)^n+\dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$.

Partie B
On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_0=6 \text{ et, pour tout entier naturel } n,~ v_{n+1}=1,4v_n-0,05v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1,4x-0,05x^2$.
   a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~8]$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

EXERCICE 4 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right).$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

Partie A - Étude de fonction f.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln\left(1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln\left(2 + \mathrm{e}^{2x}\right)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
   Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (d).
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d$'$) d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
4. Étudier les variations de la fonction f.
   Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\dfrac{3}{2}\ln 2$.
5. Tracer les droites (d) et (d$'$) sur la feuille anxtece.

Partie B - Encadrement d'une intégrale.

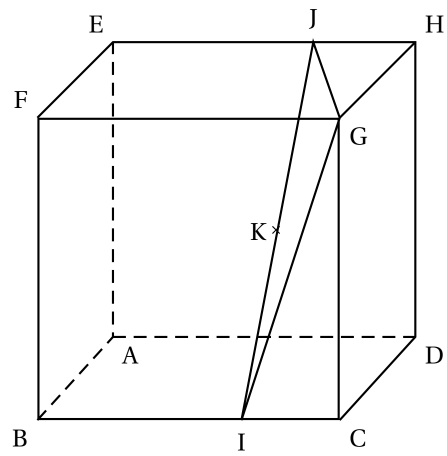
On pose $I = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

1. Donner une interprétation géométrique de I.
2. Montrer que, pour tout $X \in [0~;~+\infty[$, $\ln(1 + X) \leqslant X$.
3. En déduire que $0 \leqslant I \leqslant \displaystyle\int_2^3 2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ et donner un encadrement de I d'amplitude 0,02.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 2



EXERCICE 4