Corrigé du baccalauréat ES Polynésie 8 juin 2012

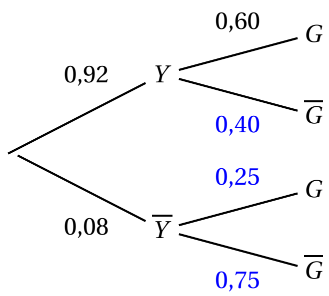
Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

$$f(x) = 2x - x\ln x.$$

1. $f(3\mathrm{e})$ est égal à :
   $f(3\mathrm{e}) = 2\times 3\mathrm{e} - 3\mathrm{e}\ln(3\mathrm{e}) = 6\mathrm{e} - 3\mathrm{e}(\ln 3 + \ln(\mathrm{e})) = 6\mathrm{e} - 3\ln 3\mathrm{e} - 3\mathrm{e} = 3\mathrm{e} - 3\ln 3\mathrm{e} = 3\mathrm{e}(1-\ln 3)$. Réponse **b.**
2. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est : $2x - x\ln x = 0 \iff x(2-\ln x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{et} \quad 2 - \ln x = 0 \iff x = 0 \quad \text{et} \quad 2 = \ln x \iff x = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^2 = x$: or $\ln x$ existe si $x > 0$, donc : réponse **b.**
3. La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à : En écrivant $f(x) = x(2-\ln x)$ on voit que la limite du premier facteur est plus l'infini celui du second moins l'infini, d'où par produit de limites moins l'infini. Réponse **c.**
4. Une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ est la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :
   Clairement la première et la troisième fonction ne peuvent donner comme dérivée $f(x)$.
   Dérivons la deuxième :
   $F'(x) = \dfrac{5}{4}\times 2x - \dfrac{1}{2}\times 2x\ln x - \dfrac{1}{2}x^2\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}x - x\ln x - \dfrac{1}{2}x = 2x - x\ln x = f(x)$.
   Réponse **b.**

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. La réponse est dans la dernière donnée : « 6% des touristes se rendant au Wyoming ne visitent aucun des deux parcs ». Donc $p\left(\overline{Y}\cap\overline{G}\right) = \dfrac{6}{100} = 0,06$.

2. 

3. On a $p_{\overline{Y}}\left(\overline{G}\right) = \dfrac{p\left(\overline{Y}\cap\overline{G}\right)}{p\left(\overline{Y}\right)} = \dfrac{0,06}{0,08} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.
   Il y a trois chances sur quatre qu'un touriste n'ayant pas visité Yellowstone ne visite pas non plus le grand Teton.
4. D'après la loi des probabilités totales :
   $p(G) = p(Y\cap G) + p\left(\overline{Y}\cap G\right) = 0,92\times 0,6 + 0,08\times 0,25 = 0,552 + 0,02 = 0,572$.
5. On a $p_G(Y) = \dfrac{p(G\cap Y)}{p(G)} = \dfrac{0,92\times 0,60}{0,572} = \dfrac{0,552}{0,572} \approx 0,965$.
6. **a.**

Somme en dollars	0	10	7	17
Probabilité	0,06	0,368	0,02	0,552

b. On a $E = 0 \times 0,06 + 10 \times 0,368 + 7 \times 0,02 + 17 \times 0,552 = 3,68 + 0,14 + 9,384 = 13,204 \approx 13,20$ \$.

En moyenne un touriste dépense 13,20 \$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour déterminer le trajet le plus court, on utilise l'algorithme de Dijkstra :

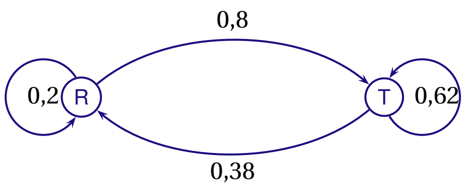
A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet retenu
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A(0)
	60 (A)	70 (A)	∞	20 (A)	45 (A)	∞	∞	E (20)
	40 (E)	70 (A)	80 (E)		45 (A)	∞	70 (E)	B (40)
		50 (B)	80 (E)		45 (A)	∞	70 (E)	F (45)
		50 (B)	80 (E)			∞	70 (E)	C (50)
			65 (C)			∞	70 (E)	D (65)
						85 (D)	70 (E)	H (70)
						85 (D)		G (85)

On retient le sommet G et ses prédécesseurs D C B E et A.

Le trajet le plus court est donc A -> E-> B-> C-> D-> G pour un temps de 85 min.

PARTIE B

1.



2. La matrice de transition M vérifiant $\begin{pmatrix} r_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n & t_n \end{pmatrix} \times M$ est

$M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,38 & 0,62 \end{pmatrix}$.

3. On a $P_2 = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,38 & 0,62 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,3116 & 0,6884 \end{pmatrix}$.

4. a. Les termes de M_2 étant non nuls, P_n converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$ tel que $P = PM$.

cette égalité se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0,x + 0,38y \\ y & = & 0,8x + 0,62y \\ x + y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,8x - 0,38y & = & \\ -0,8x + 0,38y & = & 0 \\ x + y & = & 1 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0,8x - 0,38y & = & \\ x + y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,8x - 0,38(1 - x) & = & \\ x + y & = & 1 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1,18x - 0,38 & = & 0 \\ x + y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{19}{59} \\ y & = & \frac{40}{59} \end{array}\right.$$

Donc $P = \begin{pmatrix} \frac{19}{59} & \frac{40}{59} \end{pmatrix}$ soit $P \approx \begin{pmatrix} 0,322 & 0,678 \end{pmatrix}$.

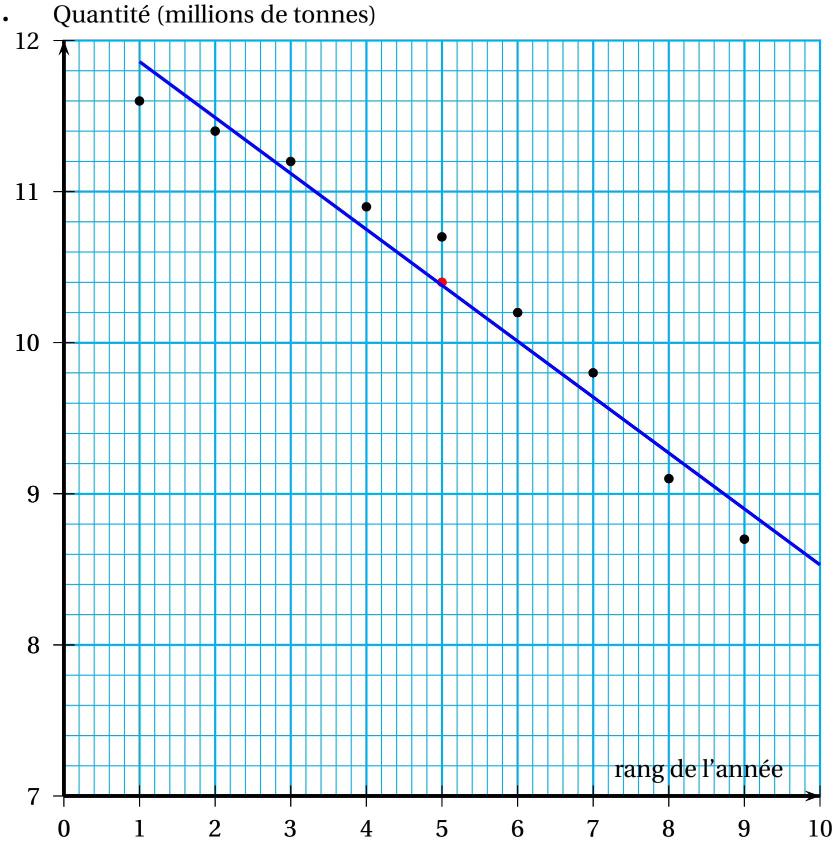
b. Sur le long terme Jonathan terminera chaque semi-marathon avec une probabilité un peu supérieure à 2 sur 3.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

1.



2. On a $\dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9} = \dfrac{9\times 10}{2\times 9} = 5$ et
$\dfrac{11,6+11,4+11,2+10,9+10,7+10,2+9,8+9,1+8,7}{9} = \dfrac{93,6}{9} = 10,4$
Donc G(5 ; 10, 4).

3. **a.** La calculatrice donne $y = -0,37x + 12,23$

b. Voir la figure.

4. 2012 correspond au rang 12, donc l'estimation des ventes en cette année est :
$-0,37 \times 12 + 12,23 = 7,79$ (millions).

PARTIE B

1. $z_3 = \mathrm{e}^{3,01} \approx 20,29$ et $z_{10} = \mathrm{e}^{3,34} \approx 28,22$.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = \mathrm{e}^{\frac{y_i}{10}}$	17,46	18,92	20,29	21,76	22,42	24,29	26,58	27,11	27,39	28,22

2. On a donc $z = \mathrm{e}^{\frac{y_i}{10}} = 1,25x + 16,56 \iff \frac{y_i}{10} = \ln(1,25x + 16,56) \iff$
$y = 10\ln(1,25x + 16,56)$.

3. Il faut trouver x entier tel que :
$10\ln(1,25x+16,56) > 35 \iff \ln(1,25x+16,56) > 3,5 \iff$
$1,25x+16,56 > \mathrm{e}^{3,5} \iff x > \dfrac{\mathrm{e}^{3,5}-13,56}{1,25}$.
Or $\dfrac{\mathrm{e}^{3,5}-13,56}{1,25} \approx 13,2$: il faut donc prendre $x = 14$.
En 2014 la consommation de gazole devrait dépasser 35 millions de tonnes.

Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

PARTIE A

Soit d la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$ par : $d(x) = \dfrac{3x+0,3}{\mathrm{e}^x} - 1,3$.

1. La fonction est dérivable puisque le dénominateur est supérieur à zéro. En dérivant le quotient :
$d'(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x(3x+0,3)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{(3-0,3)\mathrm{e}^x - 3x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{2,7-3x}{\mathrm{e}^x}$.
2. Le signe de $d'(x)$ est celui du numérateur $2,7-3x$.
$2,7-3x = 0 \iff 2,7 = 3x \iff 0,9 = x$;
$2,7-3x > 0 \iff 2,7 > 3x \iff 0,9 > x$: donc sur $[0\,;0,9[$, $d'(x) > 0$;
$d'(0,9) = 0$ et sur $]0,9\,;4]$, $d'(x) < 0$.
Il suit le tableau de variations suivants :

x	0		$0,9$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$\approx -0,08$	↘	$\approx -1,07$

3. Le tableau de variations montre que sur $[0\ ;\ 4]$, $d(x) < 0$.

PARTIE B

$$f(x) = \frac{3x+3,3}{\mathrm{e}^x} \quad \text{et} \quad g(x) = -1,3x+5,97.$$

1. a. $h(x) = g(x) - f(x) = -1,3x + 5,97 - \left(\dfrac{3x+3,3}{\mathrm{e}^x}\right)$, donc
$h'(x) = -1,3 - \dfrac{3\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x(3x+3,3)}{(\mathrm{e}^x)^2} = -1,3 - \dfrac{3-3x-3,3}{\mathrm{e}^x} = -1,3 - \dfrac{-0,3-3x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{3x+0,3}{\mathrm{e}^x} - 1,3 = d(x)$

   b. On a vu dans la partie a que $d(x) = h'(x) < 0$ sur $[0\,;4]$; la fonction h est donc décroissante sur cet intervalle de $h(0) = 5,97-3,3 = 2,67$ à $h(4) = 5,97 - 5,2 - \dfrac{15,3}{\mathrm{e}^4} \approx 0,49$.

   c. La fonction h est continue car dérivable sur $[0\,;4]$ et décroissante de $2,67 > 1$ à $h(4) < 1$: il existe donc un nombre unique $\alpha \in [0\ ;\ 4]$ tel que $h(\alpha) = 1$.
La calculatrice donne $h(3) \approx 1,46$ et $h(4) \approx 0,49$, donc $3 < \alpha < 4$.
$h(3,5) \approx 1,003$ et $h(3,6) \approx 0,90$, donc $3,5 < \alpha < 3,6$.

2. Une primitive de $g(x) = 5,97 - 1,3x$ est G définie sur [0 : 4] par
$G(x) = 5,97x - \dfrac{1,3}{2}x^2$.
Donc $\displaystyle\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = G(4) - G(1) = 5,97 \times 4 - \dfrac{1,3}{2} \times 16 - \left(5,97 - \dfrac{1,3}{2}\right) =$
$23,88 - 10,4 - 5,97 + 0,65 = 8,16$ (unités d'aire).

PARTIE C

1. On a $f(1) = \dfrac{6,3}{\mathrm{e}} \approx 2,31764$ soit environ 231 764 €.
$g(1) = 5,97 - 1,3 = 4,67$ soit 467 000 €.
Le bénéfice mensuel est donc égal à $g(1) - f(1) = 235236$ €.

2. Le prix moyen par tonne est donné par :
$\dfrac{1}{4-1}\displaystyle\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x$ soit l'intégrale calculée plus haut multipliée par $\dfrac{1}{3}$, c'est-à-dire $\dfrac{11,16}{3} = 2,72$ centaines de milliers d'euros soit 272 000 €.

3. Sur [0 ; 4], donc sur [1 ; 4] la fonction h est décroissante et on a vu que $h(\alpha) = 1$, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) \geqslant 1$ est l'intervalle $[1 ; \alpha]$, donc l'entreprise réalise un bénéfice d'au moins 100 000 € si la production mensuelle est comprise entre 1 et 3,5 tonne par mois.