

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. VRAI

Sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$, f est continue, strictement décroissante (cf tableau de variation fourni). Et l'intervalle image de $] -\infty ; 1[$ est $] -\infty ; 2[$. Or 0 appartient à cet intervalle. Selon le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $] -\infty ; 1[$.

De plus, sur $]1 ; +\infty[$, f admet 3 pour minimum. Alors, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle. Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $] -\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

2. FAUX

La droite d'équation $y = 1$ n'est ni asymptote en $-\infty$ (la limite de f est 2), ni asymptote en $+\infty$ (la limite de f est infinie).

3. FAUX

La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]1 ; 6[$. Donc sur cet intervalle, $f'(x)$ est négatif. Il existe donc au moins un réel x tel que $f'(x) \geq 0$ soit faux.

4. FAUX

La fonction f est strictement positive sur $]1 ; 6[$. Or $F' = f$. Donc $F' > 0$. D'où F est croissante sur $]1 ; 6[$.

5. ON NE PEUT PAS CONCLURE

On sait que : $\ln[f(x)]$ existe $\iff f(x)$ définie et $f(x) > 0$. Sur $] -\infty ; 0[$, l'image de x par f est parfaitement définie. Mais, on ne connaît pas le signe de f sur cet intervalle. Il se pourrait, par exemple, que $f(0)$ soit négatif!

6. a. VRAI

Par composition des fonctions, on a : $g(6) = e^{f(6)} = e^3$.

b. FAUX

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} e^{f(x)} = 0$, soit $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = 0$.

c. FAUX

On a : $g'(x) = f'(x) \times e^{f(x)}$. Or $e^{f(x)} > 0$. Donc $g'(3)$ est du signe de $f'(3)$. Or sur $]1 ; 6[$, f est décroissante. Alors $f'(3) < 0$. D'où $g'(3) < 0$.

Exercice 2

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

- 1. a.** À l'aide de la calculatrice, on obtient une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2}) : $y = -4,17x + 299,33$.
- b.** On trace D à l'aide de deux points (le point moyen G du nuage, non exigé, appartient à D).

2. Méthode libre! Lecture graphique pour $x = 12$...

On préférera un calcul :

Pour $x = 12$, on a $y_{12} = -4,17 \times 12 + 299,33 = 249,29$. Que l'on arrondit à 249 milliers de mariages.

Partie B

1. On représente le nuage de points $N_i(x_i; Y_i)$.

2. Tableau :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Z_i	2,77	2,71	3,04	3,26	3,50	3,97	4,16	4,56	4,93

3. a. On sait que : $Z = 0,29x + 2,51$ et que $Z = \ln(Y)$.

Ainsi, $\ln(Y) = 0,29x + 2,51$ qui équivaut à : $Y = e^{0,29x+2,51} = e^{0,29x} \times e^{2,51} \approx 12,30e^{0,29x}$. (le coefficient 12,30 étant arrondi)

On a bien $Y = 12,30 \times e^{0,29x}$ pour ce nouvel ajustement.

b. En 2012, $x = 12$. Alors $Y_{12} = 12,30 \times e^{0,29 \times 12} \approx 399,25$. Que l'on arrondit à 399 milliers.

Partie C

Il est toujours possible de travailler graphiquement en déterminant, par lecture, à partir de quelle valeur entière de x la courbe (C) d'équation $y = 12,30 \times e^{0,29x}$ va passer au-dessus de la droite D d'équation $y = -4,17x + 299,33$.

Car, par le calcul, cela revient à résoudre l'inéquation : $12,30 \times e^{0,29x} > -4,17x + 299,33$! Pas de méthode algébrique simple! Alors, utilisons la calculatrice ...

La fonction affine représentée par D est décroissante, tandis que la fonction représentée par la courbe (C) est croissante. Nous allons déterminer le « point de bascule » à l'aide de la table de valeurs de la calculatrice. On trouve :

x	Fonction (C)	Fonction affine (D)
10	257,63	223,54
11	253,46	298,75

C'est à partir de 2011 que, pour la première fois, le nombre de pacs dépassera celui des mariages.

Exercice 3**5 points**

Enseignement obligatoire

1. A partir de l'énoncé, puisque l'on est en situation d'équiprobabilité (le candidat interrogé étant choisi au hasard) :

$$p(R_1) = \frac{74,3}{100} = 0,743; \quad p(O) = \frac{17,8}{100} = 0,178; \quad p(E_1) = 1 - [p(R_1) + p(O)] = 0,079.$$

2. Un candidat admis est reçu au premier tour ou est reçu après avoir passé l'oral de rattrapage.

L'évènement A peut s'écrire : $A = R_1 \cup (O \cap R_2)$ et $p(O \cap R_2) = p(A) - p(R_1) = 0,861 - 0,743 = 0,118$.

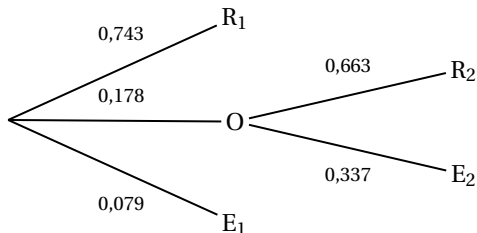
Interprétation : 11,8 % des candidats ont été reçus au rattrapage.

3. Calcul d'une probabilité conditionnelle.

$$p_O(R_2) = \frac{p(O \cap R_2)}{p(O)} = \frac{0,118}{0,178} \approx 0,663.$$

Interprétation : 66,3 % des candidats admis à l'oral de rattrapage ont été reçus.

4. Arbre de probabilités. L'arbre pondéré décrivant la situation est :



5. On interroge au hasard trois candidats et l'on considère que les trois réponses sont indépendantes les unes des autres. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ (l'expérience est répétée 3 fois dans les mêmes conditions) et $p = p(A) = 0,861$ (probabilité du succès).

Soit Z la variable aléatoire comptabilisant le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de candidats admis parmi les trois candidats interrogés.

- a. La probabilité que les trois candidats aient été admis est : $p_1 = p(Z = 3) = p(A)^3 = (0,861)^3 \approx 0,638$.
- b. La probabilité qu'au moins deux des trois candidats aient été admis est :
 $p_2 = p(Z = 2) + p(Z = 3) = 3 \times (0,861)^2 \times 0,139 + (0,861)^3 \approx 0,947$.
 Pour $p(Z = 2)$, il y a trois chemins à considérer sur l'arbre à trois niveaux

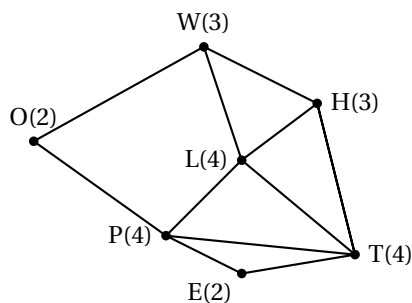
Exercice 3

5 points

Enseignement de spécialité

Partie A

Voici le graphe avec les degrés des sommets.



1. Le graphe est connexe. Or, d'après le théorème d'Euler :
 - un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si, et seulement si, le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

- un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair.

W et H sont les seuls sommets de degré impair. Le graphe admet donc une chaîne eulérienne.

W et H étant pris pour points de départ et d'arrivée, en voici une :

W-O-P-L-W-H-L-T-P-E-T-H

- Selon le 1., puisque tous les sommets ne sont pas de degré pair, le graphe n'admet pas de cycle eulérien.
- Le graphe n'est pas orienté. Ainsi, sa matrice M associée est une matrice symétrique. L'élément a_{ij} de la matrice M est égal au nombre de chaînes de longueur 1 reliant le sommet i au sommet j . Les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique EHLOPTW, la matrice M est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie B

- Utilisons l'algorithme de détermination d'une plus courte chaîne de Dijkstra. Le sommet O est le sommet de départ et T est celui d'arrivée.

On obtient la plus courte chaîne : O - P - L - H - T de poids 46.

O	W	P	L	H	E	T
0	15, O	13, O	∞	∞	∞	∞
	15, O	13, O	18, P	∞	28, P	47, P
	15, O		18, P	29, W	28, P	47, P
			18, P	26, L	28, P	47, P
				26, L	28, P	46, H
					28, P	46, H
						46, H

- Le plus court chemin de O à T est de poids 46, ce qui correspond à 46 minutes de déplacement pour Arthur.

Mais, comme celui-ci ne dispose que de 40 minutes pour arriver à Temple, il sera en retard de 6 minutes sur l'horaire fixé par les organisateurs du séjour!

Exercice 4

6 points

Commun à tous les candidats

Il s'agit d'étudier $f(x) = 17280e^{-0,024x}$.

- En 2011, $x = 11$. Donc on calcule $f(11) \approx 13271$ au billion près.
- La limite de f en $+\infty$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,024x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3. $f = ke^v$. Donc $f' = kv'e^v$. Pour tout nombre réel x de $[11; +\infty[$: $f'(x) = 17280 \times (-0,024)e^{-0,024x} = -414,72e^{-0,024x}$.

Donc $f'(x) < 0$. Alors f est strictement décroissante sur $[11; +\infty[$.

x	11	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	m	0

avec $m \approx 13271$.

4. NON! f admet pour maximum m . Or $m < 15000$. Donc il n'existe pas de valeur de x telle que $f(x) = 15000$.
5. NON! f admet pour limite 0 en plus l'infini. Donc on peut trouver x tel que $f(x) < 6000$.

Détermination de l'année :

$$f(x) < 6000 \iff e^{-0,024x} < \frac{6000}{17280} \iff -0,024x < \ln\left(\frac{6000}{17280}\right) \iff$$

$$x > \frac{\ln\left(\frac{6000}{17280}\right)}{-0,024}. \text{ Or } \frac{\ln\left(\frac{6000}{17280}\right)}{-0,024} \approx 44,07.$$

Donc on prend $x \geq 45$. Les découvertes de pétrole deviendront strictement inférieures à 6000 milliards de barils à partir de 2045.

Vérification : $x = 44$; $f(44) \approx 6011$ et $x = 45$; $f(45) \approx 5868$.

6. a. f est une fonction continue sur l'intervalle $[11; +\infty[$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle. Soit F l'une de ses primitives. On a alors :

$$f(x) = 17280e^{-0,024x}, \text{ donc } F(x) = 17280 \times \frac{1}{-0,024}e^{-0,024x} = -720000e^{-0,024x}.$$

- b. On a ensuite : $I = \int_{11}^{21} f(x) dx = F(21) - F(11) = -720000(e^{-0,504} - e^{-0,264})$.

$$\int_{11}^{21} f(x) dx \approx 117982 \text{ à l'unité près}$$

- c. On cherche la valeur moyenne v de f sur l'intervalle $[11; 21]$.

$$v = \frac{1}{21-11} \times \int_{11}^{21} f(x) dx = \frac{I}{10} \approx 11798$$

D'après ce modèle, on peut espérer découvrir 11 798 milliards de barils par an.