Corrigé du baccalauréat ES Polynésie
11 juin 2010

Exercice 1 — 3 points

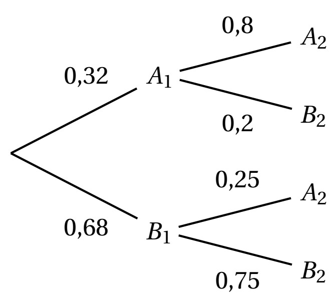
Commun à tous les candidats.

1. Si l'une des courbes est la représentation d'une primitive F de f, on a $F'(x) = f(x)$, donc le signe de f est celui de la dérivée de F qui donne la croissance ou la décroissance de F.
   Du signe de $f(x)$ on déduit que la fonction F doit être décroissante sauf sur $[-1~;~3]$ ce qui élimine $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$. Il reste donc $\mathscr{C}_3$.
2. On a sur $\mathbb{R}$, $((x-1)\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1+x-1) = x\mathrm{e}^x$.
3. Réponse 1.

Exercice 2 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.



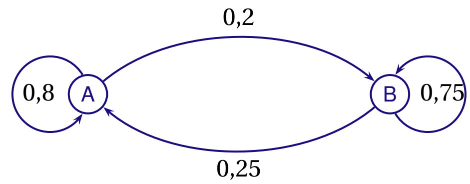
2. Il faut trouver $p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) = 0,68 \times 0,75 = 0,51$.
3. On a $p(A_1 \cap B_2) = p(A_1) \times p_{A_1}(B_2) = 0,32 \times 0,2 = 0,064$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(B_2) = p(A_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap B_2) = 0,064 + 0,51 = 0,574$.
4. On calcule $p_{B_2}(B_1) = \dfrac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \dfrac{0,68 \times 0,25}{0,574} = \dfrac{0,17}{0,574} \approx 0,296$.
5. **a.** On calcule le probabilité qu'aucun des trois n'utilise Aurora la deuxième année, donc que les trois utilisent Bestmath. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p(B_2) = 0,574$.
   La probabilité est égale à $0,574^3$, donc la probabilité demandée est égale à $1 - 0,574^3 \approx 0,811$.

   b. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p(A_2) = 1 - p(B_2) = 1 - 0,574 = 0,426$.
   Les cas favorables sont AAB, ABA et BAA donc en nombre égal à 3 et chacun de ces évènements a une probabilité de $0,426^2 \times 0,574$.
   La probabilité demandée est donc égale à : $3 \times 0,426^2 \times 0,574 \approx 0,313$.

Exercice 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a.



b. La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$.

2. a. On a $\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} 0,32 & 0,68 \end{pmatrix}$.

b. $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,32 & 0,68 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,426 & 0,574 \end{pmatrix}$.

c. $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0,32 & 0,68 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,484 & 0,516 \end{pmatrix}$.

3. a. De $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n \times M$ on déduit que :

$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,25b_n & 0,2a_n + 0,75b_n \end{pmatrix}$, d'où en particulier :

$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,25b_n$, mais comme $a_n + b_n = 1 \iff b_n = 1 - a_n$, on obtient :

$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,25(1 - a_n) = 0,55a_n + 0,25$.

Pour tout naturel n, $a_{n+1} = 0,55a_n + 0,25$.

b. On a $U_{n+1} = \dfrac{5}{9} - a_{n+1} = \dfrac{5}{9} - (0,55a_n + 0,25) = \dfrac{5}{9} - \dfrac{1}{4} - 0,55a_n = \dfrac{20-9}{36} - 0,55a_n = \dfrac{11}{36} - 0,55a_n = \dfrac{11}{36} - \dfrac{55}{100}a_n = \dfrac{11}{36} - \dfrac{11}{20}a_n = \dfrac{11}{20}\left(\dfrac{20}{36} - a_n\right) = \dfrac{11}{20}\left(\dfrac{5}{9} - a_n\right) = \dfrac{11}{20}U_n$.

L'égalité $U_{n+1} = \dfrac{11}{20}U_n$ montrer que la suite (U_n) est géométrique de raison $\dfrac{11}{20}$ de premier terme $U_0 = \dfrac{5}{9} - a_0 = \dfrac{5}{9} - 0,32 = \dfrac{5}{9} - \dfrac{8}{25} = \dfrac{125-72}{225} = \dfrac{53}{225}$.

c. On sait que quel que soit le naturel n, $U_n = \dfrac{53}{225} \times \left(\dfrac{11}{20}\right)^n$.

D'autre part $U_n = \dfrac{5}{9} - a_n \iff a_n = \dfrac{5}{9} - U_n = \dfrac{5}{9} - \dfrac{53}{225} \times \left(\dfrac{11}{20}\right)^n$.

4. a. Les termes de M étant non nuls il y a un état stable $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ (avec $x + y = 1$) tel que :

$P = P \times M \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0,8x + 0,25y \\ y & = & 0,2x + 0,75y \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,2x - 0,25y & = & 0 \\ -0,2x + 0,25y & = & 0 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} 0,2x - 0,25y & = & 0 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,8x - y & = & 0 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ (par somme) $1,8x = 1 \iff x = \dfrac{1}{1,8} = \dfrac{10}{18} = \dfrac{5}{9}$ et par conséquent $y = \dfrac{4}{9}$.

On a donc $P = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{9} & \dfrac{4}{9} \end{pmatrix}$.

b. On a $a_n = \dfrac{5}{9} - \dfrac{53}{225} \times \left(\dfrac{11}{20}\right)^n$.

Comme $0 < \dfrac{11}{20} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{11}{20}\right)^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{5}{9}$.
Or $\dfrac{5}{9} = \dfrac{5\times 12}{9\times 12} = \dfrac{60}{108} < \dfrac{60}{100}$.
La proportion de ceux qui utilisent le logiciel Aurora n'atteindra jamais les 60 %.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Voir à la fin.
2. **a.**

Rang x_i de l'année, $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 7$	6,68	6,70	7,04	7,56	7,7	8,06	8,34

   b. La calculatrice donne $z = 0,299x + 6,246$ (les coefficients ont été arrondis au millième près).

   c. Comme $z = \ln y = 0,299x + 6,246 \iff y = \mathrm{e}^{0,299x+6,246} = \mathrm{e}^{0,299x} \times \mathrm{e}^{6,246}$.
   Or $\mathrm{e}^{6,246} \approx 515,9$, donc en arrondissant à l'unité α et β au centième on obtient finalement : $y = 516\mathrm{e}^{0,30x}$.

3. 2011 correspond à $x = 10$, d'où $y = 516\mathrm{e}^{0,30\times 10} = 516\mathrm{e}^3 \approx 10364$ soit à la centaine de tonnes près 10 400 tonnes.

Exercice 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. $f(0) = -0,25\times 0^2 + 2\times 0 + 3\ln(0+1) - 1,75 - 3\ln 2 = -1,75 - 3\ln 2$.
   $f(1) = -0,25\times 1^2 + 2\times 1 + 3\ln(1+1) - 1,75 - 3\ln 2 = 0$.
2. Sur $[0\,;\,10]$, $f'(x) = -2\times 0,25x + 2 + 3\dfrac{1}{x+1} = 2 - 0,5x + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{(2-0,5x)(x+1)+3}{x+1} = \dfrac{2x+2-0,5x^2-0,5x+3}{x+1} = \dfrac{-0,5x^2+1,5x+5}{x+1}$.
   Or $-0,5(x+2)(x-5) = -0,5\left(x^2-5x+2x-10\right) = -0,5\left(x^2-3x-10\right) = -0,5x^2+1,5x+5$.
   On a donc bien sur $[0\,;\,10]$, $f'(x) = \dfrac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1}$.
3. **a.** $f'(x) = 0,5(x+2)(5-x)$ est du signe du trinôme $(x+2)(5-x)$ donc négatif sauf entre les racines -2 et 5.

   b. Donc sur $]-2\,;\,5[$, $f'(x) > 0$: la fonction est donc croissante sur $[0\,;\,5]$ de $f(0) = -1,75-3\ln 2$ à $f(5) = -0,25\times 5^2 + 2\times 5 + 3\ln(5+1) - 1,75 - 3\ln 2 = 2 + 3\ln 6 - 3\ln 2 = 2 + 3(\ln 6 - \ln 2) = 2 + 3\ln\frac{6}{2} = 2 + 3\ln 3$;
   Sur $[5\,;\,10]$ la fonction est décroissante de $f(5) = 2 + 3\ln 3$ à $f(10) = -0,25\times 10^2 + 2\times 10 + 3\ln(10+1) - 1,75 - 3\ln 2 = -6,75 + 3\ln 11 - 3\ln 2 = 3\ln\frac{11}{2} - 6,75 \approx -1,6$.

   c. On a vu que le maximum est $f(5) = 2 + 3\ln 3 \approx 5,3$.

4. a. Sur l'intervalle $[5\,;10]$, la fonction f :

– est décroissante de $2+3\ln 3>0$ à $3\ln\frac{11}{2}-6,75<0$

– continue car dérivable ;

donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire il existe un réel unique $x_0\in[5\,;\,10]$ tel que $f(x_0)=0$.

b. La calculatrice donne :

$f(9)\approx 0,8$; $f(10)\approx -1,6$, donc $x_0\in[9\,;\,10]$.

$f(9,3)\approx 0,1$; $f(9,4)\approx -0,09$, donc $x_0\in[9,3\,;\,9,4]$.

$f(9,36)\approx 0,002$; $f(9,37)\approx -0,02$, donc $x_0\in[9,36\,;\,9,37]$.

On a donc au dixième près $x_0\approx 9,4$.

5. On a donc :

$$\frac{1}{10}\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{10}[F(x)]_1^{10}=\frac{1}{10}(F(10)-F(1))=$$

$$\frac{1}{10}\left[-\frac{1}{12}\times 10^3+10^2-(4,75+3\ln 2)\times 10+3(10+1)\ln(10+1)\right]-$$

$$\frac{1}{10}\left(\left[-\frac{1}{12}\times 1^3+1^2-(4,75+3\ln 2)\times 1+3(1+1)\ln(1+1)\right]\right)=$$

$$\frac{1}{10}\left(-\frac{25}{3}+10-4,75-3\ln 2+\frac{1}{120}-0,11+0,475-0,33\ln 2-0,6\ln 2\right)=$$

$3,3\ln\frac{11}{2}-2,7\approx 2,925$ soit au dixième près 2,9

Partie B

1. On a vu que $f(1)=0$ et la fonction est croissante sur $[1\,;5]$, donc sur cet intervalle $f(x)\geqslant 0$.

On a également vu que sur $[5\,;\,x_0]$, $f(x)\geqslant 0$.

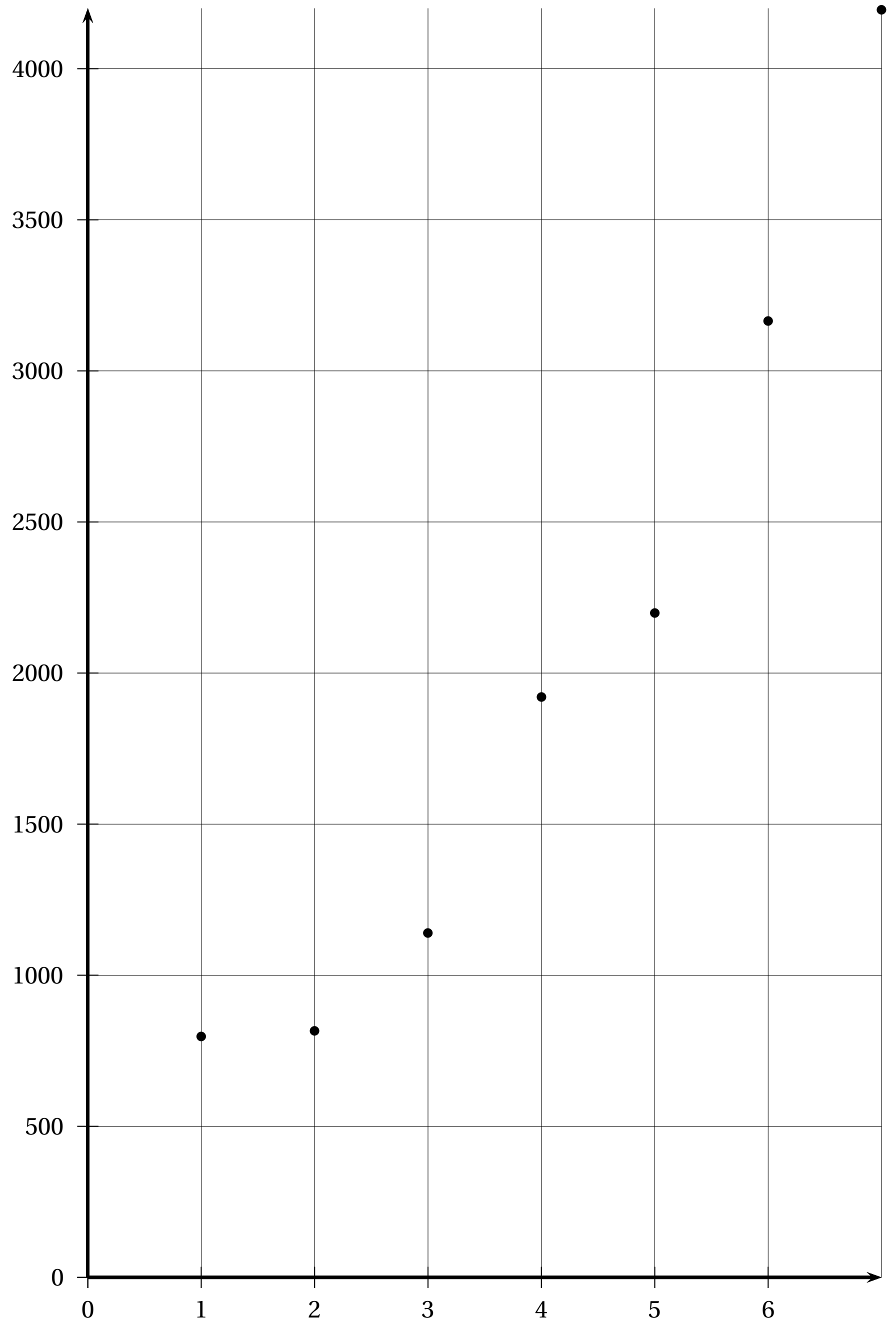
La fonction est positive sur $[1\,;\,x_0]$ et on a vu que $f(9,36)>0$, donc pour réaliser un bénéfice le supermarché doit vendre entre 1 000 et 9 360 guirlandes.

2. On a vu quelle le maximum de f est obtenu pour $x=5$.

Le bénéfice est maximal lorsque le supermarché vend5 000 guirlandes pour un bénéfice de 5 300 €.

3. Le bénéfice moyen est $b_m=\dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ qui est le résultat de la partie A.

Le bénéfice moyen est d'environ 2 900 €.


4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
1
2
3
4
5
6