∽ Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie ∾
19 novembre 2012

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1.

2. Une première modélisation : ajustement exponentiel

a.

Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$	$-0,80$	$-0,04$	0,51	1,01	1,50	2,45	3,27

b. La calculatrice livre : $z = 0,649x - 0,819$ (coefficients au millième près).

c. On a donc $z = \ln y = 0,649x - 0,819 \iff y = \text{e}^{0,649x-0,819} = \text{e}^{0,649x} \times \text{e}^{-0,819} = 0,44\text{e}^{0,649x} \approx 0,44\text{e}^{0,65x}$ avec des coefficients arrondis au centième près.

d. 2012 correspond à l'olympiade suivant, soit au rang $x = 7$.
L'estimation des coûts est donc $y = 0,44\text{e}^{0,65\times 7} = 0,44\text{e}^{4,55} \approx 42$ (milliards).

3. Une deuxième modélisation :

a. L'augmentation des coûts entre 1984 et 1988 est égale à : $\dfrac{0,96-0,45}{0,45} \times 100 \approx 113,3\,\%$

b. Si t est le taux moyen d'augmentation par olympiade entre 1984 et 2008, on a :
$0,45\times t^6 = 26,3 \iff t^6 = \dfrac{26,3}{0,45} \iff 6\ln t = \ln\left(\frac{26,3}{0,45}\right) \iff \ln t = \dfrac{1}{6}\ln\left(\frac{26,3}{0,45}\right) \iff$
$t = \text{e}^{\frac{1}{6}\ln\left(\frac{26,3}{0,45}\right)} \approx 1,97$ qui correspond bien à une augmentation moyenne en pourcentage par olympiade de 97 %.

c. Avec cette augmentation moyenne le coût à l'olympiade suivante sera de $26,3 \times t \approx 26,3 \times 1,97 \approx 51,8$.

4. La première modélisation exponentielle semble la plus proche de l'affirmation du journal anglais.

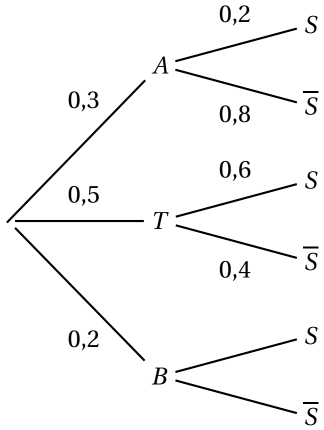
EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On sait que $p(A)+p(T)+p(B) = 1 \iff p(B) = 1-(p(A)+p(T)) = 1-0,3-0,5 = 0,2$.

2. **a.** $A\cap S$ est l'évènement : « Le touriste interrogé a voyagé en avion et est resté en Angleterre plus d'une semaine ».

b.



$p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$;
$p(T \cap S) = p(T) \times p_T(S) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$

3. D'après la loi des probabilités totales :
$p(S) = p(A\cap S) + p(T\cap S) + p(B\cap S) \iff p(B\cap S) = p(S) - p(A\cap S) - p(T\cap S) = 0,4 - 0,06 - 0,3 = 0,04$.

4. Il faut trouver : $p_S(B) = \dfrac{p(S\cap B)}{p(S)} = \dfrac{0,04}{0,4} = 0,1$.

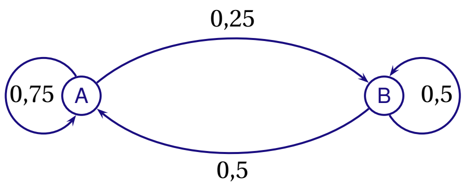
5. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = p(S) = 0,4$.
Les issues favorables sont : $S\overline{S}\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}$ et $\overline{S}\overline{S}S$, chacun de probabilité $p(S)(1-p(S))^2$.
La probabilité cherchée est donc égale à : $3 \times 0,4 \times 0,6^2 = 1,2 \times 0,36 = 0,432$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. La matrice ligne de l'état probabiliste initial est $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.



3. La matrice de transition M de ce graphe vérifie $P_{n+1} = P_n \times M$; $M = \begin{pmatrix} 0.75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

4. On a $P_3 = P_1 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \end{pmatrix}$.

5. a. Les termes de M étant non nuls, on sait que l'état P_n converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, avec $a + b = 1$.

On a $P = P \times M \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 0,75a + 0,5b \\ b & = & 0,25 + 0,5b \\ a+b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,25a - 0,5b & = & 0 \\ -0,25a + 0,5b & = & 0 \\ a+b & = & 1 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} 0,25a - 0,5b & = & 0 \\ a+b & = & 1 \end{array}\right.$.

b. En résolvant le système précédent :
$\left\{\begin{array}{lcl} 0,25a - 0,5b & = & 0 \\ a+b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,5a - b & = & 0 \\ a+b & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow 1,5a = 1 \iff$

$3a = 2 \iff a = \dfrac{2}{3}$ et par suite $b = \dfrac{1}{3}$.

On a donc $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Christophe a donc raison (en fait le troisième jour il est déjà à 62,5 % de chances de réussir 10 s soit un peu moins de 66,666 %).

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

$$f(x) = \frac{x}{x + 5\ln x}$$

1. Puisque $x \geqslant 3$, $x > 0$, donc en factorisant x on peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{1+\frac{5\ln x}{x}}$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ implique donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
2. Le dénominateur est supérieur ou égal à $3+5\ln 3$ et n'est donc pas nul ; f est donc dérivable sur $[3~;~+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et sur cet intervalle :

   $f'(x) = \dfrac{1\times(x+5\ln x) - x\times\left(1+\dfrac{5}{x}\right)}{(x+5\ln x)^2} = \dfrac{x+5\ln x - x - 5}{(x+5\ln x)^2} = \dfrac{5(\ln x - 1)}{(x+5\ln x)^2}$.
3. Le dénominateur de la dérivée est positif, son signe est donc celui de son numérateur et comme $5 > 0$ de celui de $\ln x - 1$.

   $\ln x - 1 > 0 \iff \ln x > 1 \iff x > \mathrm{e} \approx 2,718$. Donc la dérivée est positive puisque f est définie pour $x > 3$.

   Conclusion : la fonction f est strictement croissante sur $[3~;~+\infty[$ de $f(3) = \dfrac{3}{3+5\ln 3} \approx 0,353$ à 1 (limite trouvée à la question **1.**)
4. D'après la question précédente, la fonction f est continue car dérivable sur $[3~;~+\infty[$ et strictement croissante de $f(3) < 0,5$ à $1 > 0,5$: il existe donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique α, tel que $f(\alpha) = 0,5$.

   La calculatrice donne $f(12) \approx 0,49$ et $f(13) \approx 0,503$.

   Donc $\alpha \approx 13$ valeur approchée à l'entier supérieur.

Partie B

1. On a vu que $f(\alpha) = 0,5$ qui correspond à 50 % des ventes et on a vu que $\alpha \approx 13$ (par excès : il faudra donc attendre le 13^e^ jour pour vendre plus de la moitié des billets.
2. **a.** Cela signifie que le 249^e^ jour le nombre de billets vendus sera de 90 % au moins.

   b. On a vu que la moitié des places seront vendues au bout de 13 jours. Le nombre affiché en sortie sera donc 13.

EXERCICE 4 **4 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^x.$$

1. On a $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(x+1)$.
2. $f(x) = 2x \iff x\mathrm{e}^x = 2x \iff x\mathrm{e}^x - 2x = 0 \iff x(\mathrm{e}^x - 2) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l c l} x &=& 0\\ \mathrm{e}^x &=& 2\end{array}\right.$

   $\iff \left\{\begin{array}{l c l} x &=& 0\\ x &=& \ln 2\end{array}\right.$. Il y a deux solutions
3. $f(-\ln 2) = -\ln 2\mathrm{e}^{-\ln 2} = -\ln 2 \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} = -\ln 2 \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\ln 2}{2}$.
4. On a de façon simple $f(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$. Pour tout nombre positif x, $f(x)$ représente le nombre dérivé de F primitive donc la fonction F doit être croissante sur $[0~;~+\infty[$: la courbe **a.** est éliminée.

   Pour $x < 0$, $f(x) < 0$, donc la primitive F est décroissante sur $]-\infty~;~0[$ ce qui n'est pas le cas de la courbe **c.**

   Il reste donc la courbe **b.**