∽ Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie ∾ 14 novembre 2011

EXERCICE 1 **4 points**

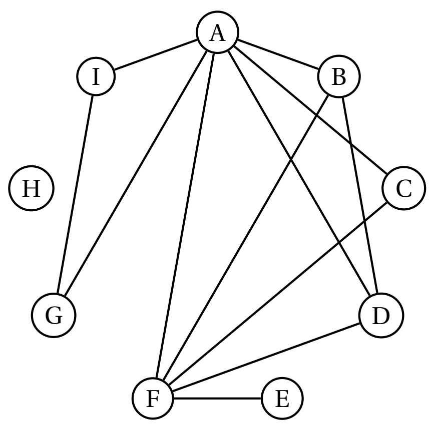
Commun à tous les candidats

1. Pour tout nombre de l'intervalle $]-\infty\,;\,1]$, on a $f'(x) \geqslant 0$. Vraie : sur $]-\infty\,;\,1]$ la fonction décroit de 1 à 0 puis croit de 0 à 5.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées. Vraie : quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers 1 : la droite horizontale d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.
3. La droite d'équation $y = 5$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$. On ne peut pas répondre car on ne sait pas si $f'(-1) = 0$.
4. Si h est la fonction définie sur $]-\infty\,;\,6[$ par $h(x) = \text{e}^{f(x)}$, on a $\lim\limits_{x \to 6} h(x) = -\infty$. On a $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{X \to -\infty} \text{e}^X = 0$, d'où par composition de limites $\lim\limits_{x \to 6} \text{e}^{f(x)} = 0$. L'affirmation est fausse.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité mathématiques

1.



2. Le point H est isolé, donc le graphe n'est pas connexe.
3. Le sous graphe A-B-D-F est complet d'ordre 4, donc le nombre chromatique du graphe G est supérieur ou égal à 4.
4. On range les sommets dans l'ordre de leurs degrés décroissants et on leur attribue les couleurs suivantes :

   A –> 1 ; F –> 2 ; B –> 3 ; D –> 4 ; C –> 3 ; G –> 2 ; I –>3 ; E –> 1 ; H –> 1.

   Si χ est le nombre chromatique de G, on sait que $\chi \geqslant 4$, mais on vient de voir qu'une coloration en 4 couleurs est possible, donc $\chi = 4$.
5. La question précédente nous donne une répartition possible :

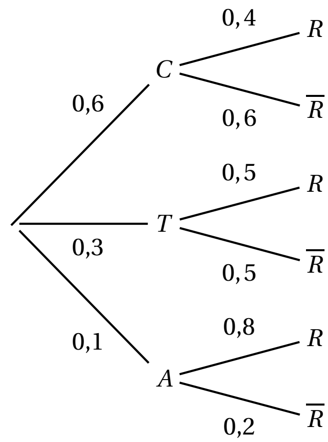
   {A, E}, {F, G}, {B, C, I}, {D}, {H} mais il y a deux isolés ; comme on peut les mettre ensemble on peut faire les groupes suivants :

   {A, E}, {F, G}, {B, C, I}, {D, H}.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1.



2. On a $p(A \cap R) = p(A) \times p_A(R) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$.
On a $p(C \cap R) = p(C) \times p_C(R) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$.

3. On a $p(T \cap R) = p(T) \times p_T(R) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(R) = p(A \cap R) + p(T \cap R) + p(C \cap R) = 0,08 + 0,15 + 0,24 = 0,47$.

4. Il faut calculer $p_R(T) = \dfrac{p(R \cap T)}{p(R)} = \dfrac{0,15}{0,47} \approx 0,319$ au millième près.

5. On a $p\left(\overline{R}\right) = 1 - p(R) = 1 - 0,47 = 0,53$.

Il faut calculer $p_{\overline{R}}(A) = \dfrac{p\left(\overline{R} \cap A\right)}{p\left(\overline{R}\right)} = \dfrac{0,1 \times 0,2}{0,53} = \dfrac{0,02}{0,53} = \dfrac{2}{53} \approx 0,038$ au millième près.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. a. La calculatrice donne $y = 3,96x + 62,16$ les coefficients étant arrondis au centième.

b. 2010 correspond au rang $x = 8$ qui donne une quantité $y = 3,96 \times 8 + 62,16 = 93,84$.

2. Si la quantité estimée pêchée en 2010 est x milliers de tonnes, alors :
$0,73x = 82,7 \iff x = \dfrac{82,7}{0,73} \approx 113,3$.
On peut penser que l'on pêchera 113 tonnes de thon en 2010.

3. a. De 2003 à 2009 la quantité pêchée est passée de 55,7 à 92,5 milliers de tonnes soit une multiplication par $\dfrac{92,5}{55,7} \approx 1,661$ c'est-à-dire une augmentation de 66,1 %.
Pour le taux moyen en pourcent, il faut trouver le nombre t tel que :
$(1+t)^6 = 1,661 \iff 1 + t = 1,661^{\frac{1}{6}} \iff t = 1,661^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0,088$ soit un taux moyen annuel de 8,8 %.

b. En prenant ce taux moyen de 8,8 % de 2003 à 2010 soit en 7 ans l'estimation de la quantité de thons blancs pêchée en 2010 sera :
$92,5 \times 1,088 \approx 100,64$. Avec ce taux moyen de 8,8 % la quantité de thons blancs pêchés en 2010 serait de 101 milliers de tonnes.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

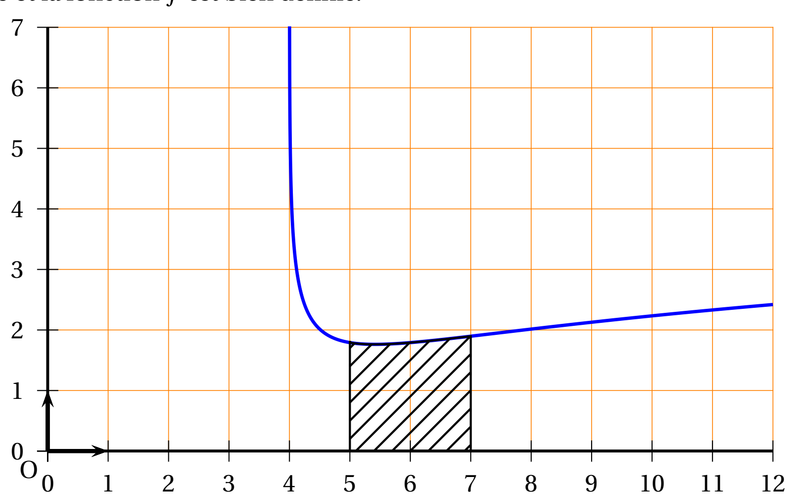
Soit u la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 4[\cup]4\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-4}.$$

1. On a $\Delta = 25-24 = 1 > 0$: il y a donc deux racines :
$\dfrac{5+1}{2} = 3$ et $\dfrac{5-1}{2} = 2$.
2. Le trinôme est positif sauf entre les racines 2 et 3, donc :
$x^2-5x+6 > 0$ sur $]-\infty\ ;\ 2[$, sur $]3\ ;\ 4[$ et sur $]4\ ;\ +\infty[$ et
$x^2-5x+6 < 0$ sur $]2\ ;\ 3[$.
D'autre part $x-4 > 0$ sur $]4\ ;\ +\infty[$ et $x-4 < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 4[$.
Donc finalement :
$u(x) > 0$ sur $]2\ ;\ 3[\cup]4\ ;\ +\infty[$
$u(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 2[\cup]3\ ;\ 4[$.
$u(2) = u(3) = 0$.
3. On sait que le trinôme peut se factoriser :
$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$.

Partie B

1. On a vu que $u(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-4} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-4}$ et on a vu que sur $]4\ ;\ +\infty[$, $u(x) > 0$, donc $\ln u(x)$ existe et la fonction f est bien définie.



2. La fonction f est positive donc $\mathscr{A}$ représente en unité d'aire la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de la fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 5$ et $x = 7$.
On voit sur ce dessin que $\mathscr{A} \approx 4$ unités d'aire.

3. **a.** Sur $]4~;~+\infty[$, $I'(x) = \ln(x-2) + \dfrac{x-2}{x-2} - 1 = \ln(x-2) = i(x)$, donc I définie sur $]4~;~+\infty[$ est une primitive de la fonction i.

b. Sur $]4~;~+\infty[$, on a :
$f(x) = \ln\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-4)} = \ln[(x-2)(x-3)] - \ln(x-4) = \ln(x-2) + \ln(x-3) - \ln(x-4) =$
$i(x) + j(x) - k(x)$.

c. Sur $]4~;~+\infty[$ une primitive de f est F définie par :
$F(x) = (x-2)\ln(x-2) - x + (x-3)\ln(x-3) - x - [(x-4)\ln(x-4) - x] =$
$(x-2)\ln(x-2) + (x-3)\ln(x-3) - (x-4)\ln(x-4) - x$.

4. On a donc :
$\mathscr{A} = \displaystyle\int_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_5^7 = F(7) - F(5) =$
$(7-2)\ln(7-2) + (7-3)\ln(7-3) - (7-4)\ln(7-4) - 7 - ((5-2)\ln(5-2) +$
$(5-3)\ln(5-3) - (5-4)\ln(5-4) - 5) = 5\ln 5 + 4\ln 4 - 3\ln 3 - 7 - 3\ln 3 - 2\ln 2 + 5 =$
$5\ln 5 + 4\ln 4 - 3\ln 3 - 3\ln 3 - 2\ln 2 - 2 = 5\ln 5 + 4\ln 4 - 6\ln 3 - 2\ln 2 - 2 \approx 3{,}61$ unités d'aire.