# Corrigé du baccalauréat ES Métropole septembre 2011

**EXERCICE 1** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

1. **a.** Sur 60 médailles, 25 sont gravées à l'effigie de Vécosse ; la probabilité d'en tirer une est donc égale à $\dfrac{25}{60} = \dfrac{5}{12}$.
   **b.** La probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Vécosse et provienne du fournisseur B est égale à $\dfrac{15}{60} = \dfrac{1}{4}$.
   **c.** On a $p_{\text{Vécosse}}(\text{B}) = \dfrac{p(\text{Vécosse} \cap \text{B})}{p(\text{Vécosse})} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{4} \times \frac{12}{5} = \dfrac{3}{5} = 0,6$.
2. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = \dfrac{5}{12}$.
   La probabilité de ne tirer aucune médaille à l'effigie de Vécosse est :
   $\left(1 - \frac{5}{12}\right)^3 = \left(\frac{7}{12}\right)^3 = \dfrac{343}{1\,728}$.
   Donc la probabilité qu'au moins une des médailles soit à l'effigie de Vécosse est égale à
   $1 - \dfrac{343}{1\,728} = \dfrac{1\,385}{1\,728} \approx 0,802$.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**PARTIE I. Maladie A**

1. La calculatrice donne $y = -89x + 4\,697$ (avec des coefficients arrondis à l'unité).
2. Voir l'annexe.
3. 2011 correspond au rang $x = 41$, d'où $y = 4\,697 - 89 \times 41 = 1\,048$ atteints de la maladie A.

**PARTIE II. Maladie B**

1. Le nuage ne suit pas sensiblement l'allure d'une droite : un ajustement affine ne semble pas pertinent.
2. On lit qu'en 2011 à peu près 7 200 personnes seront atteints de la maladie B.
3. **a.** En utilisant les coordonnées de P qui vérifient l'équation de $\Gamma$ : $1\,700 = c$.
   **b.** En utilisant les coordonnées de Q et R :
   $\left\{\begin{array}{rcl} 100a + 10b + 1\,700 & = & 1\,950 \\ 400a + 20b + 1\,700 & = & 2\,900 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 10a + b & = & 25 \\ 20a + b & = & 60 \end{array}\right. \iff$
   $\left\{\begin{array}{rcl} 20a + 2b & = & 50 \\ 20a + b & = & 60 \end{array}\right. \Rightarrow b = -10$, puis $20a = 60 - b = 70 \iff a = \dfrac{7}{2}$.
   **c.** On a donc $y = \dfrac{7}{2}x^2 - 10x + 1\,700$.
   Donc pour $x = 41$ qui correspond à 2011, on obtient :
   $$\frac{7}{2} \times 41^2 - 10 \times 41 + 1\,700 = 7\,173,5.$$
   Il y aura suivant cet ajustement environ 7 174 personnes atteintes par la maladie B en 2011.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**1.**

$$U_{n+1} = 0,8U_n + 40 \text{ et } U_0 = 150$$

Vendre 20 % des vélos c'est en conserver 80 % soit multiplier le nombre initial par 0,8 et ensuite on en achète 40 :
$U_1 = 0,8U_0 + 40 = 0,8 \times 150 + 40 = 120 + 40 = 160$ ;
$U_2 = 0,8U_1 + 40 = 0,8 \times 160 + 40 = 128 + 40 = 168$.

**2.** **a.** D'après l'extrait de la feuille de calcul la suite semble être croissante.

**b.** La limite semble être 200.

**3.** **a.** Pour tout naturel $n$, $V_{n+1} = U_{n+1} - 200 = 0,8U_n + 40 - 200 = 0,8U_n - 160 = 0,8(U_n - 200) = 0,8V_n$.
$V_{n+1} = 0,8V_n$ vraie pour tout naturel $n$ signifie que la suite $(V_n)$ est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $V_0 = U_0 - 200 = 150 - 200 = -50$.

**b.** On sait que tout naturel $n$, $V_n = V_0 \times 0,8^n = -50 \times 0,8^n$.
Or $V_n = U_n - 200 \iff U_n = V_n + 200 = 200 - 50 \times 0,8^n$.

**c.** Comme $0 < 0,8 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 200$ (ce que l'on avait pressenti.)

**d.** $U_{n+1} - U_n = 200 - 50 \times 0,8^{n+1} - (200 - 50 \times 0,8^n) = 50 \times 0,8^n - 50 \times 0,8^{n+1} = 50 \times 0,8^n(1 - 0,8) = 50 \times 0,2 \times 0,8^n = 100,8^n$.

**e.** Puisque $0,8^n > 0$, le résultat précédent montre que la suite $(U_n)$ est croissante.

**4.** On a montré que la suite $(U_n)$ croît et a pour limite 200, donc pour tout naturel $n$, $U_n < 200$.
Si la municipalité implante 250 postes il y en aura 50 en trop puisque la société Vélibre louera au maximum 199 vélos mais ceci n'est pas idiot car il y a des endroits où les gens rendent leurs vélos plus qu'à d'autres et il faut en général plus d'emplacements que de vélos.

**EXERCICE 3** **6 points**
**Commun à tous les candidats**

**1.** À l'aide de la calculatrice :

**a.** La fonction semble être décroissante sur $]0 ; 4,2]$ puis croissante sur $]4,2 ; 6]$.

**b.** On a $C(4,2) \approx 0,635$ soit 635 € pour une production de 4,2 tonnes.

**c.** 4 000 € correspondent à $y = 4$. Avec la fonction TRACE on a le curseur sur la courbe et on regarde s'il existe une abscisse pour laquelle on a $y \approx 4$. On trouve effectivement $x \approx 0,5$. On vérifie avec la calculatrice que
$C(0,5) \approx 4,03$.

**2.** En dérivant le quotient :
$C'(x) = \dfrac{0,01\text{e}^x \times x - 1(0,01\text{e}^x + 2)}{x^2} = \dfrac{0,01x\text{e}^x - 0,01\text{e}^x - 2}{x^2}$.

**3.**

$$f(x) = 0,01x\text{e}^x - 0,01\text{e}^x - 2.$$

**a.** On a $f'(x) = 0,01\text{e}^x + 0,01x\text{e}^x - 0,01\text{e}^x = 0,01x\text{e}^x$.

**b.** Comme $x > 0$ et que pour tout $x$, $\text{e}^x > 0$, on a $f'(x) > 0$ et la fonction $f$ est croissante sur $]0 ; 6]$.

**c.** On vient de voir que sur $[4~;~5]$ la fonction $f$ est croissante de $f(4) \approx -0,36$ à $f(5) \approx 3,9$ et que $f$ est continue car dérivable sur cet intervalle ; il existe donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire un réel unique $\alpha$ tel que $4 < \alpha < 5$ et $f(\alpha) = 0$. La calculatrice donne :
$f(4,1) \approx -0,13$ et $f(4,2) \approx 0,1$ donc $4,1 < \alpha < 4,2$ ; puis
$f(4,15) \approx -0,002$ et $f(4,16) \approx 0,02$ donc $4,15 < \alpha < 4,16$.
Donc au dixième près $\alpha \approx 4,2$.

**d.** D'après la question précédente :
$f(x) < 0$ sur $]0~;~\alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha~;~6]$.

**4.** On a $C'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ ; le signe de $C'(x)$ est donc celui de $f(x)$ trouvé à la question précédente, donc :
sur $]0~;~\alpha]$ $C$ est décroissante et sur $]\alpha~;~6]$, $C$ est croissante.
$C(\alpha)$ est donc le minimum de la fonction $C$ sur l'intervalle $]0~;~6]$ et $C(\alpha) \approx 0,635$ soit 635 €. Ce minimum est obtenu pour une production de 4,2 tonnes.

## EXERCICE 4 — 4 points

**Commun à tous les candidats**

**1.** Le menu hors taxes était avant à $\dfrac{12,7}{1,196}$ ; donc le prix avec la T.V.A. à 5,5 % est maintenant à : $\dfrac{12,7}{1,196} \times 1,055 \approx 11,20$. Réponse **b.**

**2.** On a $f'(x) = \dfrac{1}{x+100} > 0$ car tous les termes sont supérieurs à zéro ; la fonction est donc croissante sur $[0~;~+\infty[$. Réponse **c.**

**3.** Une primitive de $x \longmapsto 3x - x^2$ sur $[0 ; 1]$ est la fonction $x \longmapsto 3\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$.

On a donc $\displaystyle\int_0^1 \left(3x - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 3\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - \left(3\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9-2}{6} = \frac{7}{6}$. Réponse **b.**

**4.** Ce n'est pas la **a.** : en effet la dérivée en 1 de la fonction est $\ln 1 = 0$ ; la tangente en 1 doit être horizontale ce qui n'est pas le cas.
Par contre ceci est vrai pour les deux autres courbes.
Mais la fonction logarithme népérien est négative sur $]0~;~1[$ autrement dit les tangentes à la courbe entre 0 et 1 ont une pente négative ce qui n'est pas le cas de la courbe **c.** Réponse **b.**

**ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE**

Nombre de personnes atteintes de la maladie A ou de la maladie B
en France entre 1970 et 2005