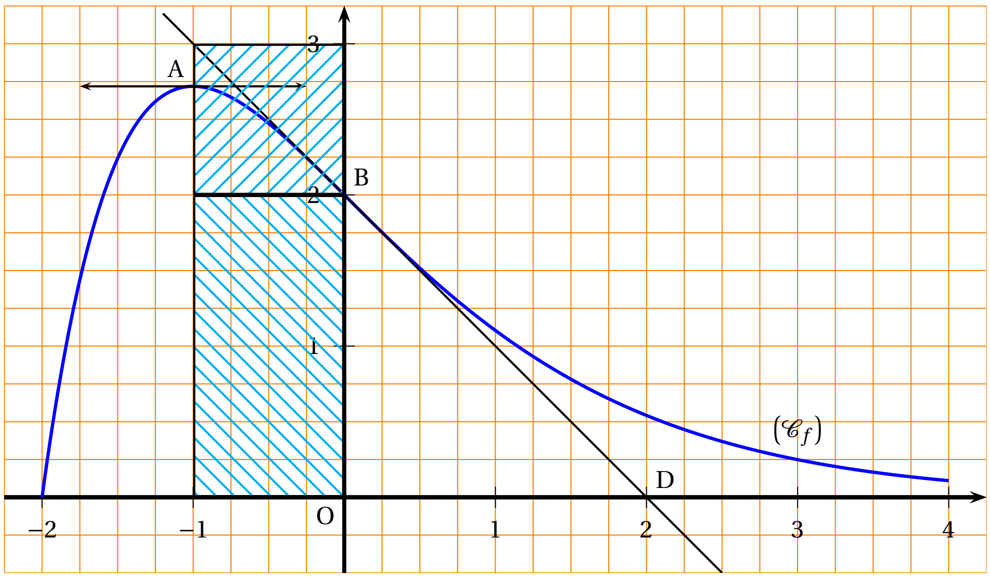
∾ Corrigé du baccalauréat ES Métropole–La Réunion ∾ septembre 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats



1. **a.** L'équation a deux solutions : $-2 < \alpha < -1,75$ et $1 < \beta < 1,25$.

   b. Le nombre dérivé en -1 est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 soit 0.

   c. La fonction est croissante sur $[-2\,;\,-1[$, donc $f'(x) > 0$ sur cet intervalle ;
   $f'(-1) = 0$;
   La fonction est décroissante sur $[-1\,;\,4[$, donc $f'(x) < 0$ sur cet intervalle

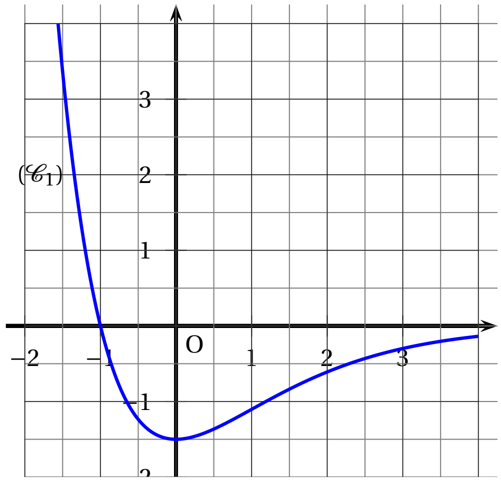
2. Donner en justifiant :

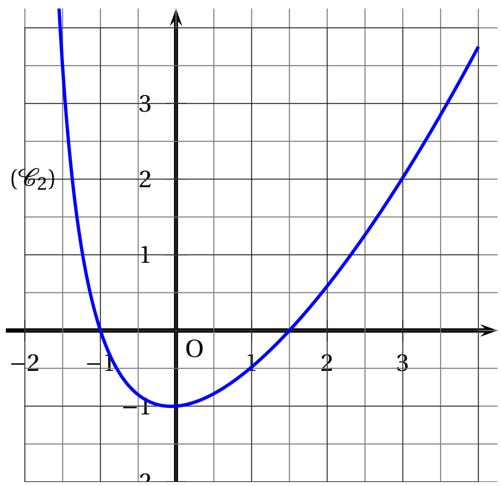
   a. Le coefficient directeur de la tangente (T) est celui de la droite (BD) soit $\dfrac{0-2}{2-0} = -1$.

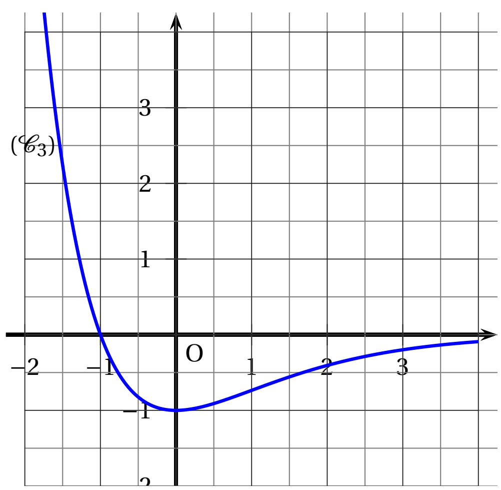
   b. On a (voir la figure) $2 < \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x < 3$.

   c. Ce n'est pas $(\mathscr{C}_2)$ car elle est positive sur $[2\,;\,4]$.
   On a vu que $f'(0) = -1$, ce qui n'est pas le cas de la courbe $(\mathscr{C}_1)$.
   Il ne reste que $(\mathscr{C}_3)$.

Annexe de l'exercice 1







EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I

1. Il y a $1400 \times 0,625 = 875$ élèves de lycée.

   Parmi ceux-ci 56 % vient par chèque bancaire soit $875 \times 0,56 = 490$ élèves qui paient chacun 50 €, soit en tout :

   $50 \times 490 = 24500$ €.

2. Les étudiants sont $1400 - 875 = 525$; ils paient chacun 60 € soit en tout $525 \times 60 = 31500$ €.

   96 % des étudiants paient par chèque bancaire ce qui représente $31500 \times 0,96 = 30240$ €.

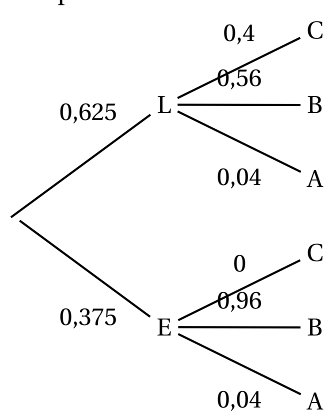
   Le montant total des locations s'élève à : $875 \times 50 + 525 \times 60 = 43750 + 31500 = 75250$ €.

   Le pourcentage des paiements par chèque bancaire est donc :

   $\dfrac{24500 + 30240}{75250} \times 100 = \dfrac{54740}{75250} \approx 72,7\ \%$.

Partie II

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.



2. **a.** On a $p(\mathrm{L} \cap \mathrm{C}) = p(\mathrm{L}) \times p_{\mathrm{L}}(\mathrm{L}) = 0,625 \times 0,4 = 0,25$.

   b. $p(\mathrm{E} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{E}) \times p_{\mathrm{E}}(\mathrm{B}) = 0,375 \times 0,96 = 0,36$.

   c. On a d'après la loi des probabilités totales :

   $p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{L} \cap \mathrm{B}) + p(\mathrm{E} \cap \mathrm{B})$.

   Or $p(\mathrm{L} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{L}) \times p_{\mathrm{L}}(\mathrm{B}) = 0,635 \times 0,56 = 0,35$, donc

   $p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{L} \cap \mathrm{B}) + p(\mathrm{E} \cap \mathrm{B}) = 0,35 + 0,36 = 0,71$.

3. Il faut trouver $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{L}) = \dfrac{p(\mathrm{L} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})} = \dfrac{0,35}{0,71} \approx 0,49$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\,(-4\ ;\ 4\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{\mathrm{CE}}\,(-4\ ;\ 0\ ;\ 4)$ qui ne sont manifestement pas colinéaires, donc les points C, D et E ne sont pas alignés et déterminent un plan unique (CDE).

b. On a : $4+0+0=4$ est vraie
$0+4+0=4$ est vraie
$0+0+4=4$ est vraie.
Les coordonnées de C, D et E vérifient l'équation $x+y+z=4$ qui est bien une équation du plan (CDE).

2. a. On voit que le point de coordonnées (2 ; 2 ; 0) appartient aux deux plans ; ces deux plans ne sont parallèles : ils sont donc sécants en (Δ).

b. (CDE) coupe le plan Oxy suivant la droite (CD) et le plan (P) coupe le plan Oxy suivant la droite d'équation $y=2$. Ces deux droites sont sécantes au point précédent P de coordonnées (2 ; 1 ; 3).
De même le plan (CDE) coupe le plan yOz suivant la droite (DE) et le plan (P) coupe le plan yOz suivant la droite d'équation $3y+z=0$. ces deux droites sont sécantes au point Q de coordonnées (0 ; 2 ; 0).
La droite (Δ) est la droite (PQ).
Voir la figure à la fin.

3. a. Voir à la fin.

b. On a $F(2~;~0~;~0) \in (Q) \iff 2a=6 \iff a=3$ et
et $G(0~;~3~;~0) \in (Q) \iff 3\times 0+3b=6 \iff b=2$.
Une équation du plan (Q) est donc $3x+2y=6$.

4. Voir la figure en vert.

5. a. $\left\{\begin{array}{rcl} 3y+z &=& 6\\ x+y+z &=& 4\\ 3x+2y &=& 6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3y+z &=& 6\\ -x+2y+z &=& 2\\ 3x+2y &=& 6\end{array}\right. \Rightarrow 4x=4 \iff x=1,$
puis $2y=6-3=3 \iff y=\dfrac{3}{2}$ et enfin $z=6-3y=6-\dfrac{9}{2}=\dfrac{3}{2}$.

b. La question précédente montre que les plans (CDE), (P) et (Q) ont en commun le point de coordonnées $\left(1~;~\dfrac{3}{2}~;~\dfrac{3}{2}\right)$.
Par définition des droites (Δ) et (Δ'), ces deux droites sont sécantes au point de coordonnées $\left(1~;~\dfrac{3}{2}~;~\dfrac{3}{2}\right)$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1.

2. a. La calculatrice donne après arrondi des coefficients à l'unité : $y=-15x+189$.

b. Voir ci-dessus

c. À leur près le prix maximal pour avoir encore des acheteurs est 12 €.

3. a. x produits vendus $15x+189$ donnent une recette de : $x\times(15x+189) = -15x^2+189x$.

b. Cette fonction est un trinôme qui a pour maximum en $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{189}{2\times(-15)}=\dfrac{189}{30}=\dfrac{63}{10}=6,3$.
La fonction est croissante de $f(0)=0$ à $f(6,3)=-15\times 6,3^2+189\times 6,3=595,35$ puis décroissante jusqu'à $-\infty$.

c. La question précédente montre que la société aura une recette maximale pour un prix de vente de 6,30 €.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** On a $x^2 - x + 1 = x\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)$.

   On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, d'où par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 + \dfrac{1}{x} = -\infty$ et enfin par produit de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

   b. On peut écrire : $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$.

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Ce résultat montre que l'axe des abscisses est asymptote à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au voisinage de plus l'infini.

2. **a.** En dérivant le produit, on a :

   $f'(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x} - \left(x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(2x - 1 - x^2 + x - 1\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(-x^2 + 3x - 2\right)$.

   b. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $-x^2 + 3x - 2$.

   On a $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1 > 0$: le trinôme a deux racines : $\dfrac{-3+1}{2 \times (-1)} = 1$ et $\dfrac{-3-1}{2 \times (-1)} = 2$.

   On sait que $-x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$, sauf sur $]1~;~2[$ où $-x^2 + 3x - 2 > 0$.

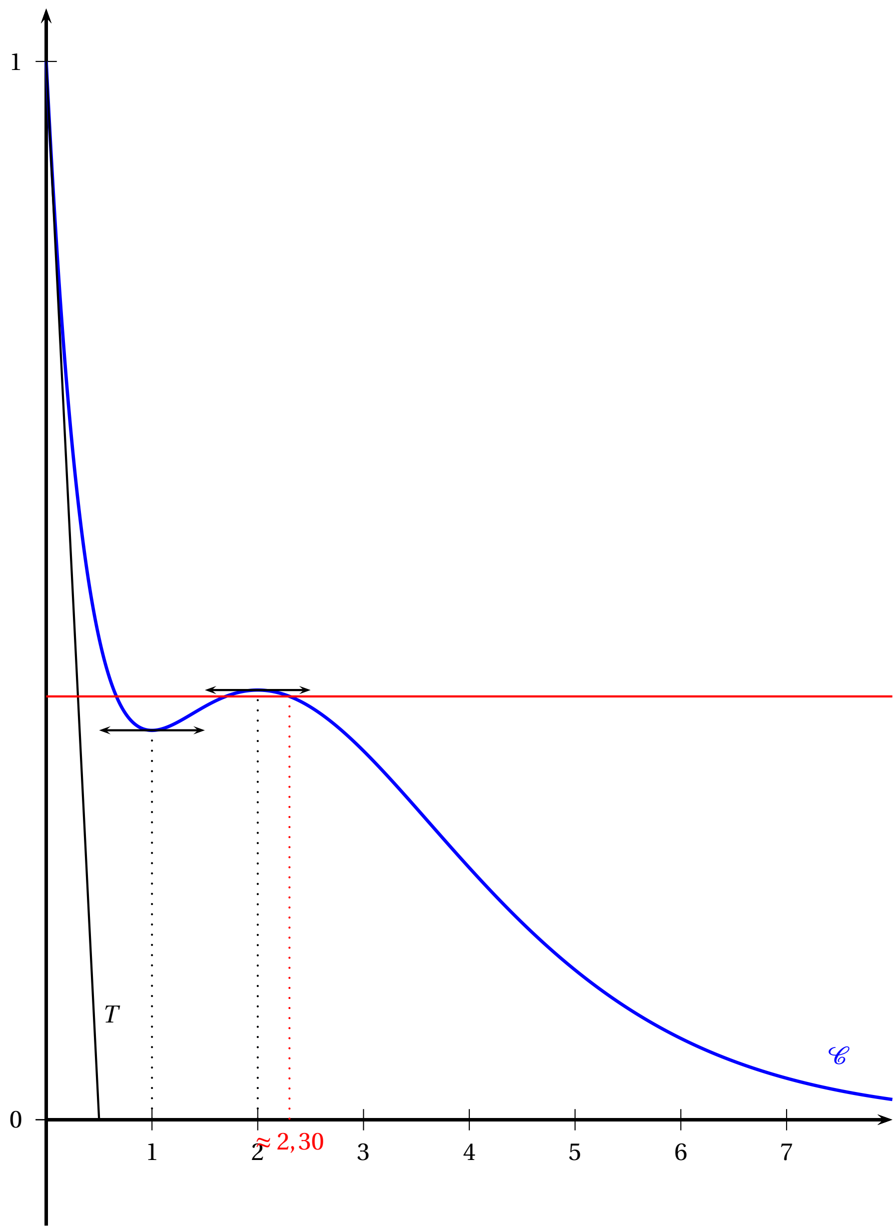
   La fonction f est donc décroissante sauf sur l'intervalle $]1~;~2[$ où elle est croissante.

   On a $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$ et $f(2) = (4 - 2 + 1)\mathrm{e}^{-2} = 3\mathrm{e}^{-2}$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		e^{-1}	↗	$3e^{-2}$	↘	0

3. Une équation de (T) est $y - f(0) = f'(0)(x-0)$, soit avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = e^{-0}\left(-0^2 + 3 \times 0 - 2\right) = -2$,
$y - 1 = -2x \iff y = -2x + 1$.

4.



5. **a.** On « voit » trois solutions.

b. Soit α la plus grande des solutions. La calculatrice donne :
$f(2) \approx 0,406$ et $f(3) \approx 0,349$, donc $2 < \alpha < 3$;

$f(2,3) \approx 0{,}400\,03$ et $f(2,4) \approx 0,396$, donc $2,3 < \alpha < 2,4$;
$f(2,30) \approx 0{,}400\,03$ et $f(2,31) \approx 0{,}399\,6$, donc $2,30 < \alpha < 2,31$.
$f(2,300) \approx 0{,}400\,03$ et $f(2,301) \approx 0{,}399\,99$, donc $2,300 < \alpha < 2,301$.
Au centième près on a donc $\alpha \approx 2,30$.

Pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Annexe de l'exercice 2
À rendre avec la copie