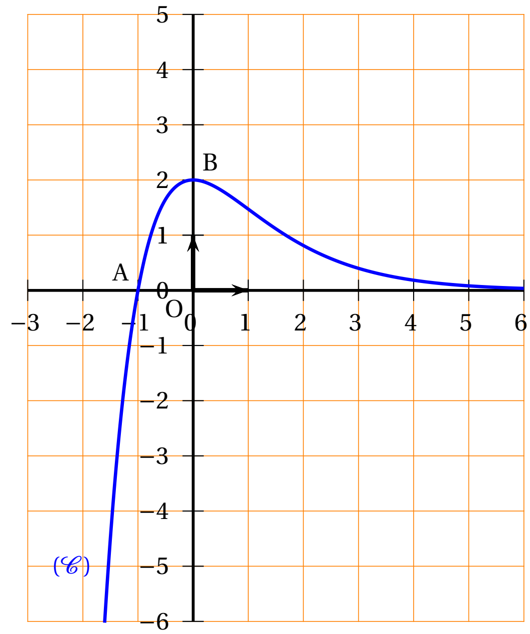
∽ Baccalauréat ES Métropole–La Réunion septembre 2008 ∽

Exercice 1 **4 points**

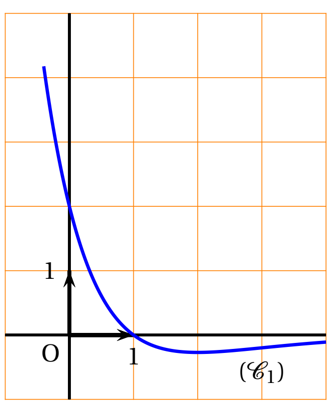
Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a tracé ci-contre sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormal.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Les points $\text{A}(-1\ ;\ 0)$ et $\text{B}(0 ; 2)$ appartiennent à la courbe $(\mathscr{C})$.
La courbe $(\mathscr{C})$ admet en B une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$.
La fonction f est décroissante et strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

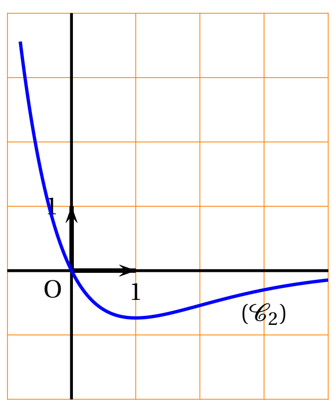


Pour chaque question, une et une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indique sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse fausse enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse donne* 0 *point. Si le total est négatif la note est ramenée à* 0.

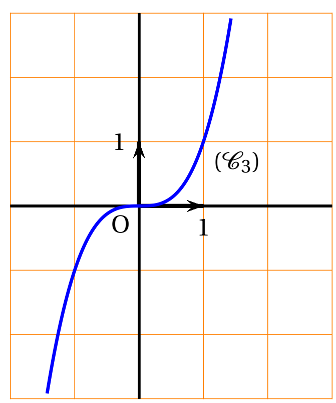
Question 1 :
Une des trois courbes ci-dessous représente graphiquement la fonction f'. Déterminer laquelle.



Réponse A

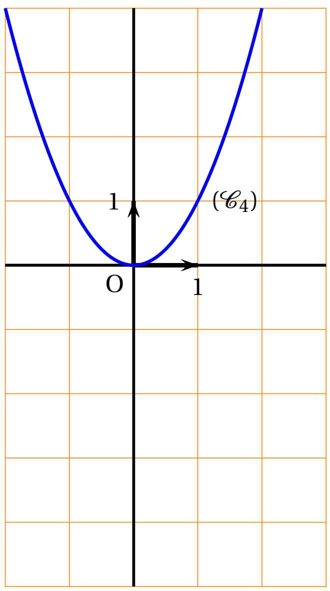


Réponse B

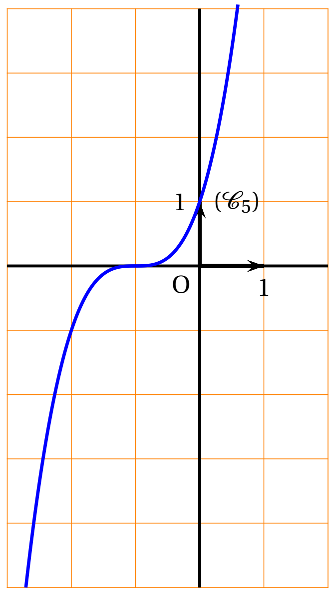


Réponse C

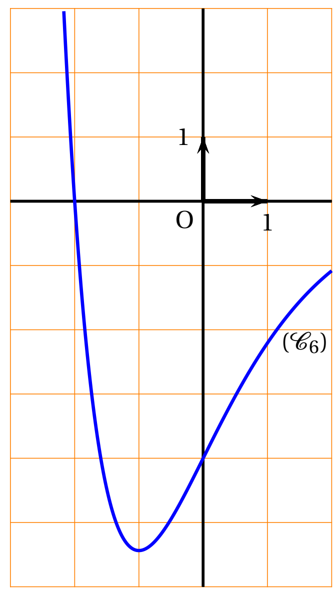
Question 2 :
Une des trois courbes ci-dessous représente graphiquement une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle.



Réponse A



Réponse B



Réponse C

Question 3 :
On désigne par ln la fonction logarithme népérien. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$.
Un des trois intervalles ci-dessous est l'ensemble de définition de la fonction g.
Déterminer lequel.

$]0\ ;\ +\infty[$	$]-1\ ;\ +\infty[$	$[-1\ ;\ +\infty[$
Réponse A	**Réponse B**	**Réponse C**

Question 4 :
g' est la fonction dérivée de la fonction g définie par $g(x) = \ln[f(x)]$.
Déterminer laquelle de ces affirmations est vraie.

$g'(1) \times g'(2) > 0$	$g'(1) \times g'(2) = 0$	$g'(1) \times g'(2) < 0$
Réponse A	**Réponse B**	**Réponse C**

Exercice 2 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le jeu d'échecs est un jeu à deux joueurs. L'un joue avec des pièces et pions clairs appelés « blancs », l'autre avec des pièces et pions foncés appelés les « noirs ». Une partie d'échecs se termine soit par la victoire des « blancs », soit par la victoire des « noirs », soit par un nul sans vainqueur.

Le président d'un club d'échecs a établi une enquête statistique sur les parties jouées par ses adhérents lors de tournois avec d'autres clubs, depuis la création de ce club.
Pour les adhérents de ce club, l'analyse des résultats a conduit aux constatations suivantes :

- 45 % des parties ont été jouées avec les blancs,
- 70 % des parties jouées avec les blancs ont été gagnantes,
- 25 % des parties jouées avec les blancs ont été perdantes',
- 4 % des parties jouées avec les noirs ont fini par un nul,
- pour les parties jouées avec les noirs, il y a eu autant de parties gagnées que perdues.

Le président de ce club choisit au hasard une partie jouée par un de ses adhérents pour l'étudier.

On appellera
— B l'évènement : « La partie choisie est jouée avec les blancs »,
— N l'évènement : « La partie choisie est jouée avec les noirs »,

— V l'évènement : « La partie choisie se termine par une victoire »,
— E l'évènement : « La partie choisie se termine par un nul »,
— D l'évènement : « La partie choisie se termine par une défaite ».

1. Déterminer la probabilité de l'évènement N.

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.

3. Justifier que la probabilité de l'évènement « La partie choisie est jouée avec les noirs et est gagnée » est égale à $0,264$.

4. Calculer la probabilité que la partie choisie se termine par une victoire.

5. Sachant que la partie choisie se termine par une victoire, calculer la probabilité qu'elle ait été jouée avec les noirs et donner sa valeur décimale arrondie au millième.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le cadre de la restructuration de son entreprise, afin de garantir la stabilité du nombre d'emplois, le directeur souhaite qu'à long terme plus de 82 % de ses employés ne travaillent que le matin.

Pour cela, il décide que désormais :

- 20 % des employés travaillant le matin une semaine donnée travaillent l'après-midi la semaine suivante.
- 5 % des employés travaillant l'après-midi une semaine donnée travaillent aussi l'après-midi la semaine suivante.

On note :
A : « L'employé travaille le matin »
B : « L'employé travaille l'après-midi »

1. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

b. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2. La semaine notée 0, semaine de la décision, 60 % des employés travaillent le matin et les autres l'après-midi.

a. Donner la matrice ligne notée P_0 décrivant l'état initial des employés dans cette entreprise.

b. Calculer la probabilité qu'un employé travaille le matin lors de la semaine 2, deuxième semaine après la prise de décision,

3. Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable.

a. Démontrer que x et y vérifient l'égalité $x = 0,8x + 0,95y$.

b. Déterminer x et y.

c. Le souhait du directeur de cette entreprise est-il réalisable ? Justifier la réponse.

4. On admet qu'un an après cette décision la probabilité qu'un employé travaille le matin est égale à $\dfrac{19}{23}$. On choisit alors quatre employés au hasard. Le grand nombre d'employés de l'entreprise permet d'assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.

Déterminer la probabilité qu'au moins un des quatre employés travaille l'après-midi et donner sa valeur décimale arrondie au millième.

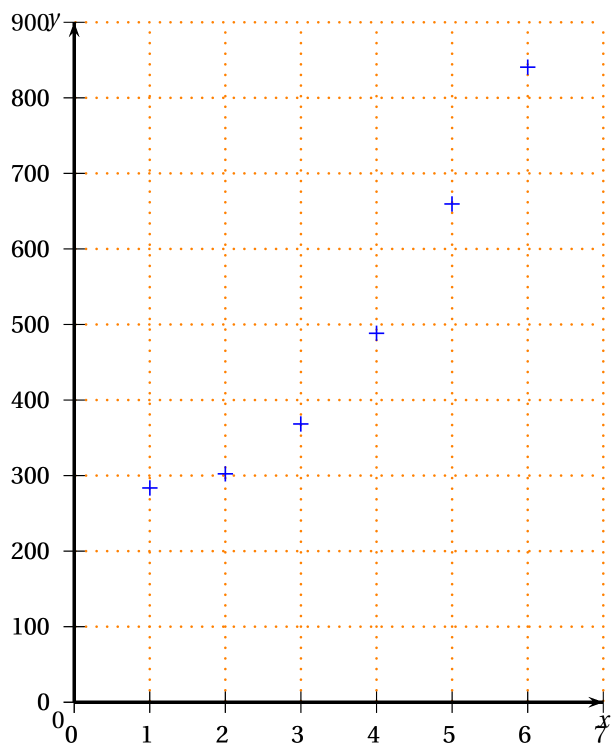
EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'évolution du montant des exportations de biens et services de la Chine exprimé en milliards de dollars constants, sur la période 2000-2005.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Montant des exportations en milliards de dollars constants y_i	280	299	365	485	656	837

Source : La banque Mondiale.

1. Le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ est représenté ci-dessous dans un repère orthogonal.



Un ajustement affine semble-t-il adapté ? Justifier.

2. On pose, pour i variant de 1 à 6, $z_i = \ln y_i$.

a. Recopier et compléter le tableau suivant avec les valeurs de z_i arrondies au centième :

x_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$			5,90			

b. On décide d'envisager un ajustement affine de la série $(x_i\ ;\ z_i)$, pour i variant de 1 à 6. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de $z = \ln y$ en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au millième.

c. En déduire une relation entre y et x de la forme $y = A\mathrm{e}^{Bx}$, A étant arrondi l'unité et B au millième.

Dans la question suivante, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

3. On admet que cet ajustement reste fiable à moyen terme, avec $A = 198$ et $B = 0,233$.

a. Estimer, par le calcul, le montant des exportations de biens et services de la Chine pour l'année 2008 arrondi au milliard de dollars constants.

b. Selon ce modèle, peut-on affirmer que le pourcentage d'augmentation des exportations de biens et services de la Chine entre les années 2000 et 2008 sera supérieur à 450 % ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5x-5}{\mathrm{e}^x}.$$

On nomme $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans le plan (P) muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Calculer $f(0)$.

2. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x) = \dfrac{5-\frac{5}{x}}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$.

b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Démontrer que pour tout nombre réel x positif : $f'(x) = \dfrac{-5x+10}{\mathrm{e}^x}$.

b. Étudier le signe de la fonction f'.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$ dans le plan (P).

5. On note F la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par : $F(x) = -5x\mathrm{e}^{-x}$.

a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

b. On considère l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$.
Hachurer ce domaine sur le graphique précédent.
Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.