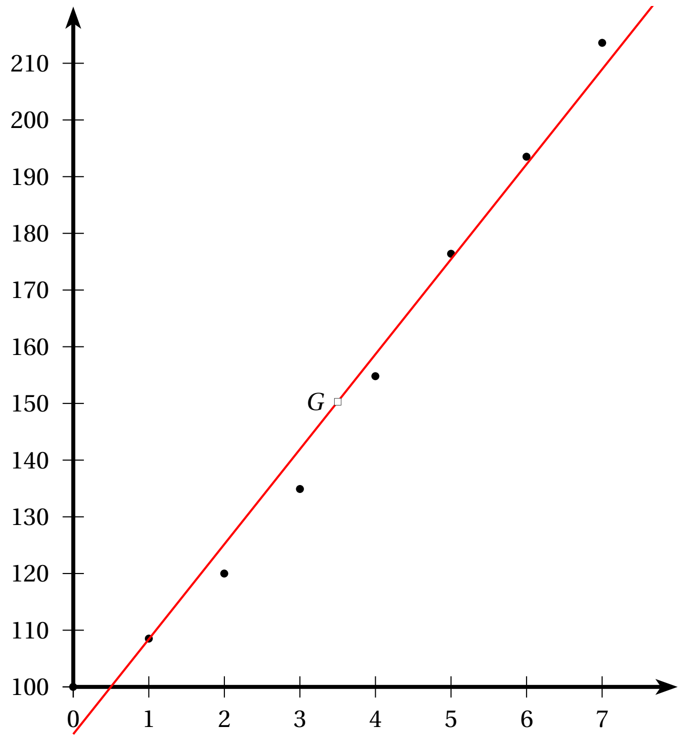
Correction du sujet bac ES France juin 2009

Exercice 1

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice : y_i	100	108,5	120,7	134,9	154,8	176,4	193,5	213,6

1. $213{,}6 - 100 = 113{,}6$.
   Le pourcentage d'augmentation de ces indices entre l'année 200 et l'année 2007 est de 113,6 %.

2. Nuage de points :



3. Les moyennes des deux séries sont respectivement :
   $\overline{x} = 3{,}5$ et $\overline{y} = 150{,}3$.
   Les coordonnées du point moyen sont : $\boxed{G(3{,}5\ ;\ 150{,}3)}$.

4. (a) À l'aide de la calculatrice, on trouve que l'équation déduite de (d) est : $\boxed{y = 16{,}75x + 91{,}67}$.

   (b) voir graphique

5. 2009 correspondrait à un rang égal à 9.
   L'indice de prix vaudrait alors : $16{,}75 \times 9 + 91{,}67 = 242{,}42$.
   L'indice des prix en 2009 sera environ égal à 242,4

Exercice 2

(Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. (a) On a : $\boxed{f(0) = 4}$

   $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à Γ en C, (CF) : $f'(1) = \dfrac{y_F - y_C}{x_F - x_C} = \dfrac{6 - 4{,}5}{3 - 1} = \dfrac{1{,}5}{2} = \boxed{0{,}75}$

   $\boxed{f'(2) = 0}$. (tangente à Γ parallèle à (Ox) en B et en D)

   (b) $f'(x)$ est négatif sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$, positif sur $[0\ ;\ 2]$ et négatif sur $[2\ ;\ 5]$.

   (c) Sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$, f a un minimum en 0 qui vaut 4, donc $f(x)$ est positif sur $[-2\ ;\ 2]$.
   Sur $[2\ ;\ 5]$, f est décroissante avec $f(4) = 0$: on en déduit que $f(x)$ est positif sur $[2\ ;\ 4]$, nul pour $x = 4$ et négatif sur $[4\ ;\ 5]$.
   Résumé :

x	-2		4		5
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(f(x))$.

   (a) $g(x)$ est définie si, et seulement si, $f(x) > 0$, c'est-à-dire pour $\boxed{x \in [-2\ ;\ 4]}$.

(b) $g(-2) = \ln(f(-2)) = \ln 9 = 2\ln 3$; $g(0) = \ln(f(0)) = \ln 4 = 2\ln 2$ et $g(2) = \ln(f(2)) = \ln 5$.

(c) Sur $[-2\ ;\ 0]$, f est décroissante positive et ln est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$; on en déduit que g est décroissante (la composée d'une fonction décroissante avec une fonction croissante est décroissante).
Sur $[0\ ;\ 2[$, f est croissante et ln aussi, donc leur composée g est aussi croissante.
Sur $[2\ ;\ 4[$, f est décroissante et ln est croissante, donc leur composée g est aussi décroissante.

(d) $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = \lim\limits_{x\to 4} \ln(f(x)) = \lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$ (d'après la limite des fonctions composées).
On en déduit que la droite d'équation $x = 4$ est **asymptote** à la courbe représentative de g.

(e) Tableau de variation de g :

x	-2		0		2		4
$g(x)$	$2\ln 3$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$\ln 5$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 2

(Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité) **Partie 1 :**

1. (a) Ce graphe est **connexe** (deux sommets quelconques sont reliés par un chemin).
   (b) Ce graphe n'est **pas complet** (A et E ne sont pas adjacents).
   (c) Regardons les degrés de chaque sommet :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	2	4	5	5	4	4	2

   Le graphe est connexe et deux sommets seulement ont un degré impair (C et D), donc le graphe **admet une chaîne eulérienne** (entre C et D).
   (d) Comme tous les sommets ne sont pas degré pair, le graphe **n'admet pas de cycle eulérien**.
2. CDEF est un sous-graphe complet d'ordre 4, donc le nombre chromatique de ce graphe est supérieur ou égal à 4.
   Utilisons l'algorithme de Welsh-Powell :

Sommet	C	D	B	E	F	A	G
Couleur	Rouge	Vert	Bleu	Jaune	Bleu	Vert	Rouge

   On voit que quatre couleurs suffisent ; le **nombre chromatique du graphe est 4**.

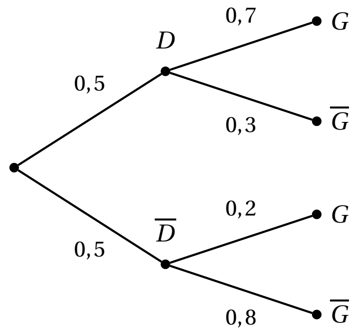
Partie II
On cherche un trajet minimum reliant A à G en utilisant l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	G	choix	coefficient
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A	0
	$0+2=2$ (A)	$0+1=1$ (A)	∞	∞	∞	∞	C	1
	$1+2=3>2\to 2$(A)		$1+4=5$ (C)	$1+3=4$ (C)	$1+5=6$ (C)	∞	B	2
			$2+1=3$ (B)	$2+3=5>4\to 4$ (C)	6 (C)	∞	D	3
				$3+3=6>4\to 4$ (C)	$3+6=9>6\to 6$ (C)	$3+5=8$ (D)	E	4
					$4+1=5$ (E)	8(D)	F	5
						$5+2=7$ (F)	G	7

Le trajet à l'envers est G-F-E-C-A.
Le trajet comportant un minimum de feux tricolores est A-C-E-F-G avec sept feux tricolores.

Exercice 3

1. (a) Arbre complété :



(b) $p(D\cap G) = p_D(G)\times p(D) = 0,7\times 0,5 = \boxed{0,35}$.

(c) $p(\overline{D}\cap G) = p_{\overline{D}}(G)\times p(\overline{D}) = 0,2\times 0,5 = \boxed{0,1}$.

(d) $G = (G\cap D)\cup(G\cap\overline{D})$ (réunion d'événements incompatibles).
On en déduit que : $p(G) = p(D\cap G) + p(\overline{D}\cap G) = 0,35+0,1 = \boxed{0,45}$.

(e) On veut calculer $p_G(D)$:
$p_G(D) = \dfrac{p(D\cap G)}{p(G)} = \dfrac{0,35}{0,45} = \dfrac{35}{45} = \boxed{\dfrac{7}{9}}$

2. La probabilité cherchée est :
$p((G\cap G\cap\overline{G})\cup(G\cap\overline{G}\cap G)\cup(\overline{G}\cap G\cap G)) = 3\left[p(G)\right]\times(1-p(G)) = 3\times 0,45^2\times 0,55\ \boxed{\approx 0,334}$.

Exercice 4

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5\,;\,8]$ par : $f(x) = 20(x-1)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

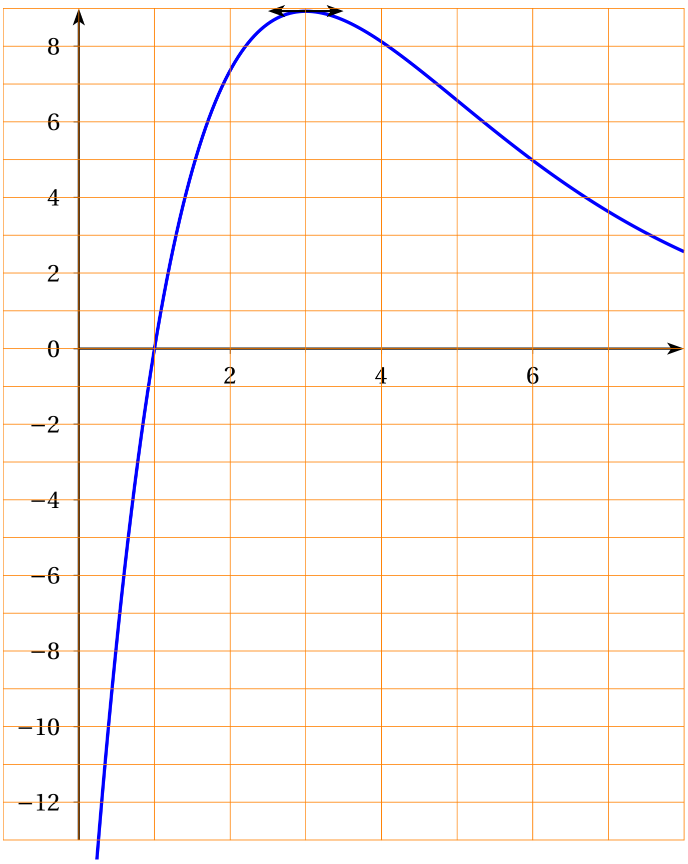
1. (a) $f = 20u\mathrm{e}^{v}$ avec $u(x) = x-1$ et $v(x) = -0,5x$.
f est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables.
$f' = \left(20u\mathrm{e}^{v}\right)' = 20\times\left(u\mathrm{e}^{v}\right)' = 20\times\left(u'\times\mathrm{e}^{v} + u\times v'\mathrm{e}^{v}\right) = 20(u'+uv')\mathrm{e}^{v}$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -0,5$.
On en déduit que : $f'(x) = 20(1-0,5(x-1))\mathrm{e}^{-0,5x} = 20(1,5-0,5x)\mathrm{e}^{-0,5x} = 10\times 2(1,5-0,5x)\mathrm{e}^{-0,5x} = 10(3-x)\mathrm{e}^{-0,5x}$.
$\boxed{f'(x) = 10(-x+3)\mathrm{e}^{-0,5x}}$.

(b) 10 >0 ; pour tout x, $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
$f'(x)$ est du signe de $-x+3$, donc positif pour $x\leqslant 3$ et négatif pour $x\geqslant 3$.
$\boxed{f \text{ est croissante sur } [0,5\,;\,3] \text{ puis décroissante sur } [3\,;\,8]}$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	0,5		3		8
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$f(0,5)$	↗	$f(3)$	↘	$f(8)$

$f(0,5) = -10\mathrm{e}^{-0,25}\approx -7,8$; $f(3) = 40\mathrm{e}^{-1,5}\approx 8,9$ et $f(8) = 140\mathrm{e}^{-4}\approx 2,6$.

(c) **Courbe (échelle non respectée) :**



(d) Soit $F(x) = \dfrac{-40(x+1)}{e^{0,5}x} = -40(x+1)e^{-0,5x}$.
F est dérivable et $F = -40we^{v}$ avec $w(x) = x+1$ et $v(x) = -0,5x$.
$F' = -40(w' + wv')e^{v}$ avec $w'(x) = 1$ et $v'(x) = -0,5x$.
lors : $F'(x) = -40(1-0,5(x+1))e^{-0,5x} = -40(0,5-0,5x)e^{-0,5} = 20(x-1)e^{-0,5x} = f(x)$.
Pour tout x de $[0,5~;~8]$, $F' = f$ donc $\boxed{F \text{ est une primitive de } f}$.

(e) $I = \displaystyle\int_{1,5}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - F(1,5)$.
$F(5) = -240e^{-2,5}$ et $F(1,5) = -100e^{-0,75}$.
$\boxed{I = -240e^{-2,5} + 100e^{-0,75}}$

Partie B

1. (a) 220 bicyclettes correspondent à 2,2 centaines, donc à $x = 2,2$. Le bénéfice correspondant est alors $f(2,2) = 24e^{-1,1} \approx 7,989$ milliers d'euros, donc environ $\boxed{7\,989 \text{ euros}}$.
   (b) Pour 408 bicyclettes ($x = 4,08$), le bénéfice vaut $f(4,08)$ milliers d'euros, soit $\boxed{8\,010 \text{ euros}}$.
2. (a) Pour ne pas travailler à perte, l'entreprise doit réaliser un bénéfice positif. Il est clair que $f(1) = 0$ et que $f(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$. $\boxed{\text{L'entreprise doit donc produire au moins 100 bicyclettes.}}$
   (b) D'après la partie A, le bénéfice est maximum pour $\boxed{x = 3}$, c'est-à-dire pour une production de 300 bicyclettes. Ce bénéfice est alors $f(3) \approx 8,923$ milliers d'euros, donc de $\boxed{8\,925 \text{ euros}}$.
   (c) Le bénéfice est supérieur à 8 000 euros si $f(x) \geqslant 8$.

   - La résolution algébrique de l'inéquation est impossible.
   - Si l'on utilise les résultats précédents en a. et b., on ne sait pas trop quoi prendre : $f(2,2) < 8$ donc $x = 2,2$ est trop petit ; $f(4,08) > 8$ donc 4,08 est lui aussi trop petit.
   - Une résolution graphique précise est impossible.
   - Reste le théorème des valeurs intermédiaires :
     Sur $[0,5~;~3]$, f est continue strictement croissante ; $f(1) = 0$ et $f(3) > 8$ donc l'équation $f(x) = 8$ a une solution unique α sur $[1~;~3]$; à la calculatrice, on trouve $2,20 < \alpha < 2,21$.
     De même, sur $[3~;~8]$, f est continue strictement décroissante ; cette équation a une solution unique β avec $4,08 < \beta < 4,09$.
     Conclusion :
     $\boxed{\text{il faut que l'entreprise produise entre 221 et 408 bicyclettes pour obtenir un bénéfice supérieur à 8 000 euros.}}$