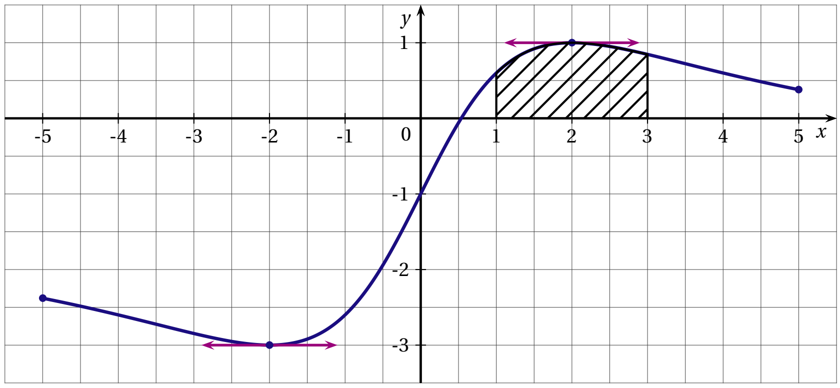
Corrigé du baccalauréat ES Liban
29 mai 2012

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats



1. Il y a deux tangentes horizontales, donc deux nombres dérivés nuls, l'équation a deux solutions.
2. Le nombre dérivé est positif signifie que la fonction est croissante ; on voit qu'elle est croissante sur $[-2\ ;\ 2]$.
3. La fonction g est définie si $f(x) > 0$, donc quand la courbe est au dessus de l'axe des abscisses soit sur l'intervalle $]0,5\ ;\ 5]$.
4. Sur l'intervalle $[1\ ;3]$, la fonction f est positive, donc l'intégrale est l'aire en unités d'aire de la surface limitée par la coure, l'axe des abscisses et les verticales $x = 1$ et $x = 3$. L'unité d'aire contient 4 carreaux, et l'on compte pour la surface à peu près 7 carreaux soit environ 1,75 unité d'aire : la bonne réponse est la deuxième. (voir la figure)

Exercice 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

1$^{\text{re}}$ partie : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 8$.

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$, d'où par produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x(x-1) = +\infty$ et enfin $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f est dérivable et sur intervalle :
$f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$.
3. D'après le résultat précédent $f'(x)$ est le produit de deux nombres positifs ou nul, donc $f'(x) \geqslant 0$: la fonction f est donc croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, de $f(0) = -9$ à $+\infty$.
4. **a)** Sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f est dérivable, donc continue et croissante de -9 à plus l'infini : elle s'annule donc une seule fois sur cet intervalle. L'équation $f(x) = 0$ a une solution unique.

   b) La calculatrice donne $f(2) \approx -0,6$ et $f(3) \approx 32$, donc $2 < a < 3$;
   $f(2,0) \approx -0,6$ et $f(2,1) \approx 0,98$, donc $2,0 < a2,1$;
   $f(2,04) \approx -0,002$ et $f(2,05) \approx 0,16$, donc $2,04 < a < 2,05$;
   $f(2,040) \approx -0,002$ et $f(2,041) \approx 0,014$, donc finalement

$$2,040 < a < 2,041.$$

c) Puisque $f(a) = 0$ et que la fonction est croissante on a donc :

— $f(x) < 0$ sur $[0\ ;\ a[$ et

— $f(x) > 0$ sur $]a\ ;\ +\infty[$.

5. a) La fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - 8 = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 8 = f(x)$.
Conclusion g est une primitive de f.

b) D'après le résultat précédent : $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = g(5) - g(3) = 5\mathrm{e}^5 - 2\mathrm{e}^5 - 8 \times 5 - \left(3\mathrm{e}^3 - 2\mathrm{e}^3 - 8 \times 3\right) = 3\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 - 16$.

2^e^ partie : Application à une situation économique

1. On a vu que $f(a) = 0$ et que $f(2,041) > 0$; donc l'entreprise commence à réaliser des bénéfices à partir de 2 041 objets produits.

2. On sait que la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[3\ ;\ 5]$ est égale à :

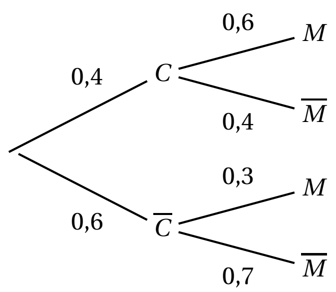
$$m = \frac{1}{5-3}\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 - 16}{2} \approx 204,58$$

À l'euro près la valeur moyenne du bénéfice sera de 20 458 €.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. On sait que $P_C(M) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,24}{0,4} = 0,6$.

2.



3. On a $P\left(\overline{C} \cap \overline{M}\right) = P_{\overline{C}}\left(\overline{M}\right) \times P\left(\overline{C}\right) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$.

4. Les évènements C et M déterminent une partition de l'ensemble des résultats, donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(M) = P(M \cap C) + P\left(M \cap \overline{C}\right) = 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,3 = 0,24 + 0,18 = 0,42$.

5. On a $P(M) = 0,42$ et $P_C(M) = 0,6$, donc les évènements M et C ne sont pas indépendants.

6. a) On a $\left(C \cap \overline{M}\right) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$: cet évènement correspond à un coût de 35 euros.

x_i	75	40	35	0
p_i	0,24	0,18	0,16	0,42

b) On a $\mathrm{E} = 75 \times 0,24 + 40 \times 0,18 + 35 \times 0,16 = 30,80$ (€)
La dépense moyenne par client sera de $30,80$ (€)

c) On reprend le tableau précédent en appelant x la somme demandée pour la réalisation d'un « effet coup de soleil »

x_i	$35+x$	x	35	0
p_i	0,24	0,18	0,16	0,42

On veut une espérance de $30,8 \times 1,15 = 35,42$.
Il faut donc que $35,42 = 0,24(35+x) + 0,18x + 35 \times 0,16 + 0$ soit
$35,42 = 8,4 + 0,24x + 0,18x + 5,6$ ou encore $21,42 = 0,42x$ soit $x = 51$ (€)
Il faut donc augmenter la prestation « effet coup de soleil » de $51 - 35 = 16$ (€).

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
A) Lectures graphiques

1. On trace la droite horizontale d'équation $y = 41$ qui coupe les deux courbes en deux points d'abscisses respectives approximatives 2 et 7 : l'enfant a entre 2 et 7 mois.
2. Pour 15 mois on lit entre 43 et 49,5 cm.
pour 21 mois on lit entre 45 et 51 cm.
Donc un enfant entre 15 et 21 mois aura un périmètre crânien compris entre 43 et 51 cm.

B) Étude d'un modèle

1.

âge x en mois	0	12	24	36
z	$\ln 18$	$\ln 8$	$\ln 6$	$\ln 4$

2. a) La calculatrice livre $z = -0,04x + 2,76$.
b) On a pour $y < 5$, $z = \ln(54 - y) \iff e^z = 54 - y \iff y = 54 - e^z$ soit finalement :

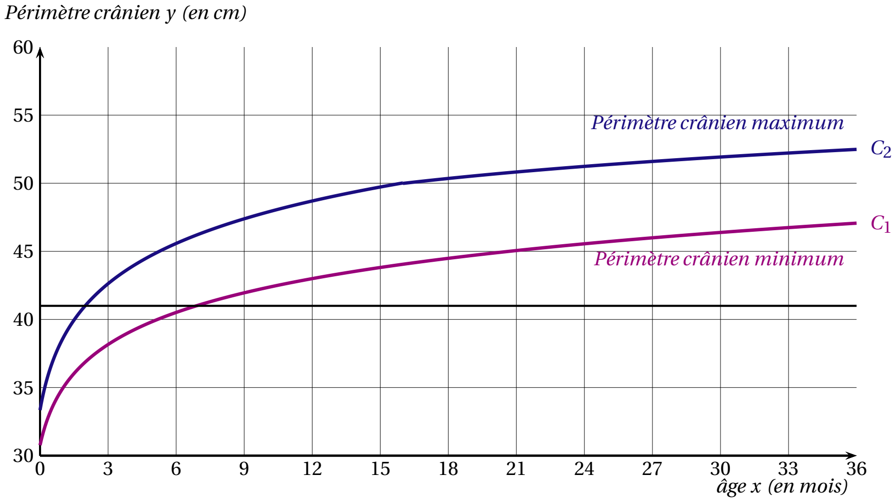
$$y = 54 - e^{-0,04x+2,76}.$$

C) Utilisation du modèle précédent

Dans cette partie, on utilisera le modèle établi dans la question **2. b)** de la partie **B**.

1. On a quel que soit le nombre x, $54 - e^{-0,04x+2,76} = 53 \iff e^{-0,04x+2,76} = 1$ et par croissance de la fonction logarithme népérien :
$-0,04x + 2,76 = 0 \iff 0,04x = 2,76 \iff x = \dfrac{2,76}{0,04} = 69$ (mois).
2. 15 mois correspondent à $15 \times 12 = 180$ (mois).
Le périmètre crânien moyen est alors :
$54 - e^{-0,04\times180+2,76} \approx 54 - 0,0118$ soit à peu près 53,99 (cm).
À quinze ans le périmètre crânien est à peu près de 54 cm.

Annexe à remettre avec la copie



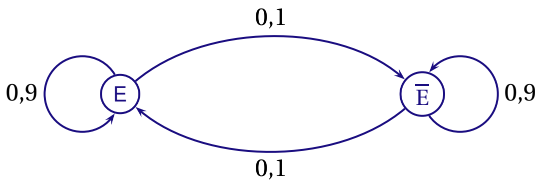
Courbes obtenues à partir de l'étude séquentielle française de la croissance CIE-INSERM (M. Sempé)

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Propagation symétrique (de type « neutre »)

1.



2. La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\0,1 & 0,9\end{pmatrix}$.

3. On a successivement :

$P_1 = P0 \times M = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\0,1 & 0,9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,9 & 0,1\end{pmatrix}$;

$P_2 = P0 \times M^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\0,1 & 0,9\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0,82 & 0,18\end{pmatrix}$;

$P_3 = P0 \times M^3 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\0,1 & 0,9\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}0,756 & 0,244\end{pmatrix}$.

Donc le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,8$ est $n = 3$.

4. Les termes de la matrice étant non nuls il y a un état stable $P = \begin{pmatrix}p & q\end{pmatrix}$ tel que $p + q = 1$.

De $P = P \times M$ on déduit que $\begin{pmatrix}p & q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p & q\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\0,1 & 0,9\end{pmatrix}$.

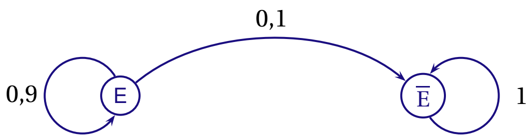
On en déduit que :

$\left\{\begin{array}{lcl} p & = & 0,9p + 0,1q\\ q & = & 0,1p + 0,9q\\ p+q & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,1p & = & 0,1q\\ 0,1q & = & 0,1p\\ p+q & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} p & = & q\\ q & = & p\\ p+q & = & 1\end{array}\right. \Rightarrow$
$p = q = 0,5$.

Conclusion $P = \begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix}$.

Partie B : Propagation asymétrique (de type « rumeur »)

1.



2. On a $N = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9p_n & 0,1p_n + q_n \end{pmatrix}$.

Donc $p_{n+1} = 0,9p_n$: la suite $\left(p_n\right)$ est géométrique de raison 0,9.

4. Comme $p_0 = 1$, on sait que $p_n = p_0 \times 0,9^n = 0,9^n$.

5. $p_n < 0,5 \iff 0,9^n < 0,5 \iff n \ln 0,9 < \ln 0,5 \iff n > \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,9}$ (car $\ln 0,9 <$).

Comme $\dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,9} \approx 6,6$, le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,5$ est $n = 7$.

6. On sait que comme $0 < 0,9 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$.

Conclusion : sur le long terme seule la fausse rumeur sera transmise.