Baccalauréat ES Liban 31 mai 2010

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C ou D est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif la note est ramenée à* 0.

1. A et B sont deux évènements indépendants et on sait que $p(A) = 0,5$ et $p(B) = 0,2$.
   La probabilité de l'évènement $A \cup B$ est égale à :

Réponse **A :** 0,1	Réponse **B :** 0,7
Réponse **C :** 0,6	Réponse **D :** on ne peut pas savoir

2. Dans un magasin, un bac contient des cahiers soldés. On sait que 50 % des cahiers ont une reliure spirale et que 75 % des cahiers sont à grands carreaux. Parmi les cahiers à grands carreaux, 40 % ont une reliure spirale.
   Adèle choisit au hasard un cahier à reliure spirale. La probabilité qu'il soit à grands carreaux est égale à :

Réponse **A :** 0,3	Réponse **B :** 0,5
Réponse **C :** 0,6	Réponse **D :** 0,75

   Dans les questions 3. et 4., on suppose que dans ce magasin, un autre bac contient une grande quantité de stylos-feutres en promotion. On sait que 25 % de ces stylos-feutres sont verts. Albert prélève au hasard et de manière indépendante 3 stylos-feutres.

3. La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'il prenne au moins un stylo-feutre vert est égale à :

Réponse **A :** 0,250	Réponse **B :** 0,422
Réponse **C :** 0,578	Réponse **D :** 0,984

4. La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'il prenne exactement 2 stylos-feutres verts est égale à :

Réponse **A :** 0,047	Réponse **B :** 0,063
Réponse **C :** 0,141	Réponse **D :** 0,500

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x + k\mathrm{e}^{ax} \text{ où } k \text{ et } a \text{ sont des nombres fixés.}$$

Sur la figure donnée en annexe, la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction g et la droite D d'équation $y = x$ sont tracées dans un repère orthogonal (unités : 2 cm pour l'axe des abscisses, 1 cm pour l'axe des ordonnées).
Le point E a pour coordonnées (0 ; 6) et le point F a pour coordonnées (3 ; 0). On précise que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point E et la courbe $\mathscr{C}$ admet au point B une tangente horizontale.
On note g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. **a.** Par lecture graphique, déterminer la valeur de $g(0)$.
   b. Par lecture graphique, déterminer la valeur de $g'(0)$.
   c. Exprimer $g'(x)$ en fonction de a et k.

d. En utilisant les résultats précédents, déterminer les valeurs de k et a. On justifiera les calculs.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $g(x) = x + 6\mathrm{e}^{-0,5x}$.

2. Démontrer que la droite D est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est située au dessus de la droite D. Soit S le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 4$.

a. Hachurer S sur le graphique.

b. Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine S. Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à $0,1$ cm^2 près.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la valeur exacte de l'abscisse du point B.

Exercice 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0~;~20]$ par

$$f(x) = \left(3\mathrm{e}^2 - x\right)\ln x + 10.$$

1. a. Déterminer la limite de f en 0.

b. Calculer la valeur exacte de $f\left(\mathrm{e}^2\right)$, puis une valeur approchée à $0,01$ près.

2. Montrer que, pour tout x de $]0~;~20]$, $f'(x) = -\ln x + \dfrac{3\mathrm{e}^2}{x} - 1$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.

3. On admet que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $]0~;~20]$ et que son tableau de variations est le suivant :

x	0		e^2		20
$f'(x)$	‖	↘	0	↘	$f'(20)$

a. À l'aide du tableau de variations, donner le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~20]$.

b. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~20]$ et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

4. a. Montrer que, sur l'intervalle $[0,6~;~0,7]$, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution notée α. À la calculatrice, donner une valeur approchée de α à $0,001$ près par excès.

b. Démontrer que $f(x)$ est négatif pour tout $x \in]0~;~\alpha[$ et que $f(x)$ est positif pour tout $x \in]\alpha~;~20]$.

Partie B

Une entreprise produit et vend chaque semaine x milliers de DVD, x appartenant à $]0~;~20]$.
Le bénéfice réalisé est égal à $f(x)$ milliers d'euros où f est la fonction étudiée dans la partie A.
En utilisant les résultats de la partie A :

1. déterminer le nombre minimal de DVD à fabriquer pour que le bénéfice soit positif;
2. déterminer le nombre de DVD à produire pour que le bénéfice soit maximal ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice maximal.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. L'évolution du chiffre d'affaires du groupe de distribution Enville pour la période 2004-2008 est donnée dans le tableau 1 ci-dessous :

   Tableau 1 :

Année	2004	2005	2006	2007	2008
Progression du chiffre d'affaires par rapport à l'année précédente	4,7 %	10,6 %	4,1 %	5,8 %	7,5 %

   Par exemple, le chiffre d'affaires du groupe a augmenté de 10,6 % entre le 31 décembre 2004 et le 31 décembre 2005.

   a. Montrer qu'une valeur approchée à $0,1$ près du pourcentage annuel moyen d'augmentation, est $6,5$.

   b. En 2008, ce groupe a réalisé un chiffre d'affaires de 59,5 milliards d'euros. La direction prévoit une croissance annuelle de 6,5 % pour les années suivantes. Donner une estimation à $0,1$ milliard d'euros près du chiffre d'affaires du groupe pour l'année 2010.

2. L'évolution, sur 8 ans, du chiffre d'affaires du groupe Aupré, concurrent du groupe Enville, est donnée par le tableau 2 ci-dessous :

   Tableau 2 :

Année	2001	2003	2005	2007	2008
Rang de l'année x_i	1	3	5	7	8
Chiffre d'affaires exprimé en milliards d'euros y_i	64,8	68,7	72,7	77,1	82,1

   Pour cette question tous les résultats seront arrondis au dixième près.

   a. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points associé à la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ en prenant comme origine le point de coordonnées $(0;60)$ (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

   b. En utilisant la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement affine de y en x. Tracer cette droite sur le graphique.

   c. À l'aide de l'ajustement précédent, déterminer graphiquement une estimation du chiffre d'affaires du groupe Aupré pour l'année 2010. On laissera apparents les traits de construction.

3. Dans cette question, on suppose qu'à partir de 2008 le chiffre d'affaires du groupe Enville progresse chaque année de 6,5 % et celui du groupe Aupré de 3 %.

   a. Résoudre l'inéquation $59,5 \times 1,065^n > 82,1 \times 1,03^n$.

   b. Déterminer à partir de quelle année le chiffre d'affaires du groupe Enville dépassera celui du groupe Aupré.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Deux chaînes de télévision A et B programment chaque semaine, à la même heure, deux émissions concurrentes. On suppose que le nombre global de téléspectateurs de ces émissions reste constant. La première semaine, 70 % de ces téléspectateurs ont regardé la chaîne A.

Une étude statistique montre que :
15 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante.
10 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante. On note respectivement a_n et b_n les proportions de téléspectateurs des chaînes A et B la n-ième semaine et P_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$. On a donc $P_1 = (0,7 \quad 0,3)$.

1. **a.** Déterminer le graphe probabiliste représentant la situation.
   b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
2. Calculer M^3 à l'aide de la calculatrice, donner les résultats en arrondissant à 10^{-3} près. Quelle est la répartition des téléspectateurs entre les deux chaînes lors de la quatrième semaine ?
3. On considère la matrice ligne $P = (a \quad b)$, où a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$.
   a. Déterminer a et b pour que $P = PM$.
   b. Interpréter les deux valeurs trouvées.
4. On admet que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $a_n = 0,4 + 0,3 \times \left(0,75^{n-1}\right)$.
   a. Résoudre l'inéquation $a_n < 0,5$.
   b. À partir de quelle semaine l'audience de l'émission de la chaîne B dépassera-t-elle celle de l'émission de la chaîne A ?

Annexe à remettre avec la copie

Exercice 2 (commun à tous les candidats)