Corrigé du baccalauréat ES Liban 31 mai 2010

Exercice 1 **4 points**

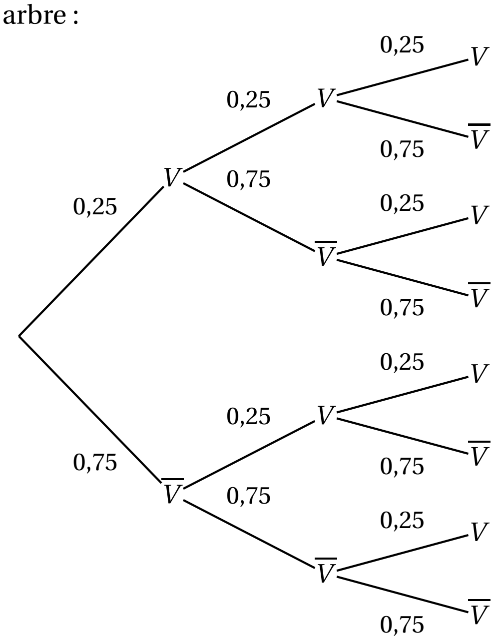
1. A et B sont deux évènements indépendants donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,1$
et comme $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B = 0,6$ **Réponse C**

2. En appelant S l'évènement « Le cahier est à spirale » et C l'évènement « Le cahier est à gros carreaux » on a

$$p_S(C) = \frac{p(S \cap C)}{P(S)} = \frac{P(C) \times P_(S)}{P(S)} = \frac{0,75 \times 0,4}{0,5} = 0,6$$

Réponse C

3. La loi numérique correspondant au nombre de stylos-feutres verts est une loi binomiale. Il faut faire un arbre :



On cherche la probabilité de l'évènement contraire de « On a obtenu aucun stylo vert » donc

$$p = 1 - 0,75^3 \approx 0,578$$

Réponse C

4. Sur l'arbre, il y a trois chemins de même probabilité qui donnent 2 stylos verts donc

$$p = 3 \times 0,25^2 \times 0,75 \approx 0,141$$

Réponse C

Exercice 2 **5 points**

1. a. $\boxed{g(0) = 6}$

b. $g'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0. Il vaut $\boxed{g'(0) = \dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = -2}$

c. Pour tout réel on a :

$$g'(x) = 1 + ake^{ax}$$

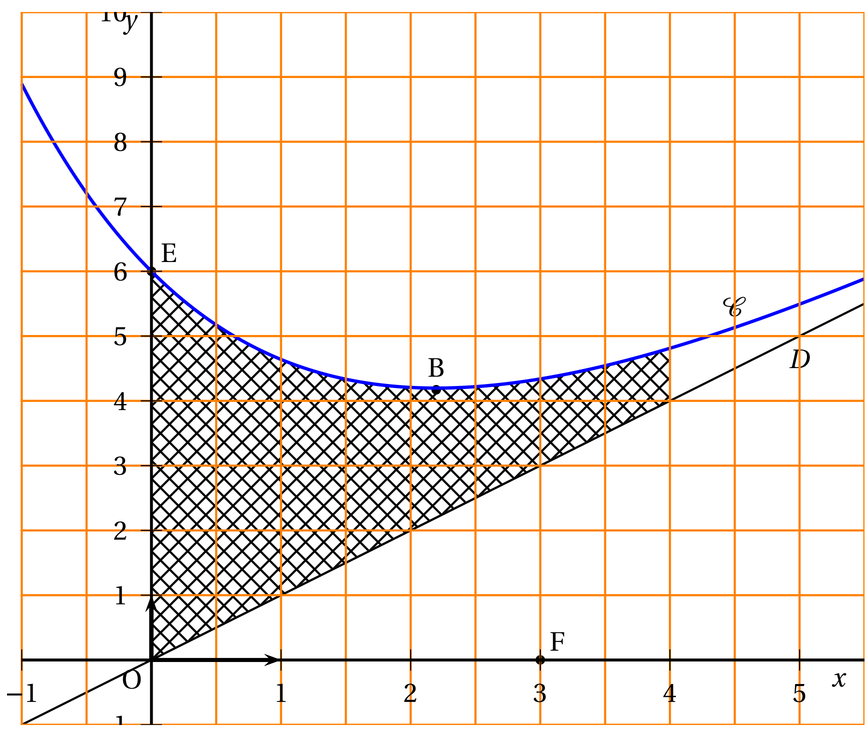
d. Les réels a et k vérifient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g(0) & = & 6 \\ g'(0) & = & -0,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0 + ke^0 & = & 6 \\ 1 + ake^0 & = & -0,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} k & = & 6 \\ 1 + 6a & = & -0,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} k & = & 6 \\ a & = & \frac{-1,5}{6} = -0,5 \end{array}\right.$$

2. On a $g(x) - x = 6e^{-0,5x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,5x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$

On a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(g(x) - x\right) = 0}$, ce qui montre que la droite D est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. a. *graphique*



b. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^4 g(x) - x\mathrm{d}x &= \int_0^4 6e^{-0,5x}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{6}{-0,5}e^{-0,5x}\right]_0^4 \\ &= \left[-12e^{-0,5x}\right]_0^4 \\ &= 12 - 12e^{-2} \\ &\approx 10,38 \end{aligned}$$

Or l'unité d'aire vaut 2×1 cm^2 donc

$\boxed{\text{L' aire du domaine vaut } 24 - 24e^{-2} \text{ cm}^2 \text{ soit environ } 20,8 \text{ cm}^2}$

4. Le point B est le point qui correspond au minimum de la fonction, en ce point la tangente est horizontale, donc la dérivée s'annule en x_{B}. On doit donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0\\ 1+6\times(-0,5)\times \mathrm{e}^{-0,5x} &= 0\\ 1-3\mathrm{e}^{-0,5x} &= 0\\ 1 &= 3\mathrm{e}^{-0,5x}\\ \frac{1}{3} &= \mathrm{e}^{-0,5x}\\ \ln\left(\frac{1}{3}\right) &= -0,5x\\ \ln 3 &= 0,5x\\ x &= 2\ln 3 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le point B a pour abscisse } 2\ln 3}$.

Exercice 3 **6 points**

Partie A

1. **a.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} 3\mathrm{e}^2 - x = 3\mathrm{e}^2$ qui est positif et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty}$

b. On a :

$$\begin{aligned} f\left(\mathrm{e}^2\right) &= \left(3\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2\right)\ln\left(\mathrm{e}^2\right)+10\\ &= 2\mathrm{e}^2\times 2+10\\ &= 4\mathrm{e}^2+10\\ &\approx 39,556 \end{aligned}$$

2. La fonction f est de la forme $uv+10$ avec

$$\begin{aligned} u(x) &= 3\mathrm{e}^2 - x\\ v(x) &= \ln x \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} u'(x) &= -1\\ v'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Donc pour pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\times\ln x + \left(3\mathrm{e}^2 - x\right)\times\frac{1}{x}\\ &= -\ln x + \frac{3\mathrm{e}^2}{x} - 1 \end{aligned}$$

3. **a.** Comme la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $]0~;~20]$ et s'annule en e^2, elle est strictement positive sur $\left]0~;~\mathrm{e}^2\right[$ et strictement négative sur $\left]\mathrm{e}^2~;~20\right]$.

b. On en déduit le tableau suivant :

x	0		e^2		20
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\mathrm{e}^2\right)$	$\searrow$	$f(20)$

4. **a.** Sur l'intervalle $[0,6;~~0,7]$, la fonction f est continue et strictement croissante, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend une seule fois toutes les valeurs de l'intervalle $[f(0,6)\ ;\ f(\ 0,7)]$ or $f(0,6) \approx -1,02$ et $f(0,7) \approx 2,34$, ils sont de signes différents donc l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α.

En utilisant le tableau de la calculatrice on trouve que $f(x)$ change de signe entre 0,628 et 0,629 donc

$$\boxed{\alpha \approx 0,629 \text{ à } 0,001 \text{ près par excès.}}$$

b. Comme la fonction f est strictement croissante sur $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^2\right[$ et s'annule en α, elle est strictement négative sur $]0\ ;\ \alpha[$ et strictement positive sur $\left]\alpha\ ;\ \mathrm{e}^2\right]$.

De plus, $f(20) \approx 16,49$ donc $f(x)$ reste positif sur $\left[\mathrm{e}^2\ ;\ 20\right]$.

Partie B

1. D'après la partie A, pour que $f(x)$ soit positif il faut que $x > \alpha$.

   $\boxed{\text{Il faut donc produire au moins 629 DVD pour que le bénéfice soit positif.}}$

2. D'après la partie A, f admet un maximum lorsque $x = \mathrm{e}^2 \approx 7,389$
   et ce maximum vaut $f\left(\mathrm{e}^2\right) \approx 39,56$.

   $\boxed{\text{L'entreprise doit produire 7389 DVD pour réaliser un bénéfice maximal de 39 560 €}}$

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Appelons t_m le taux moyen entre 2004 et 2008, on a donc

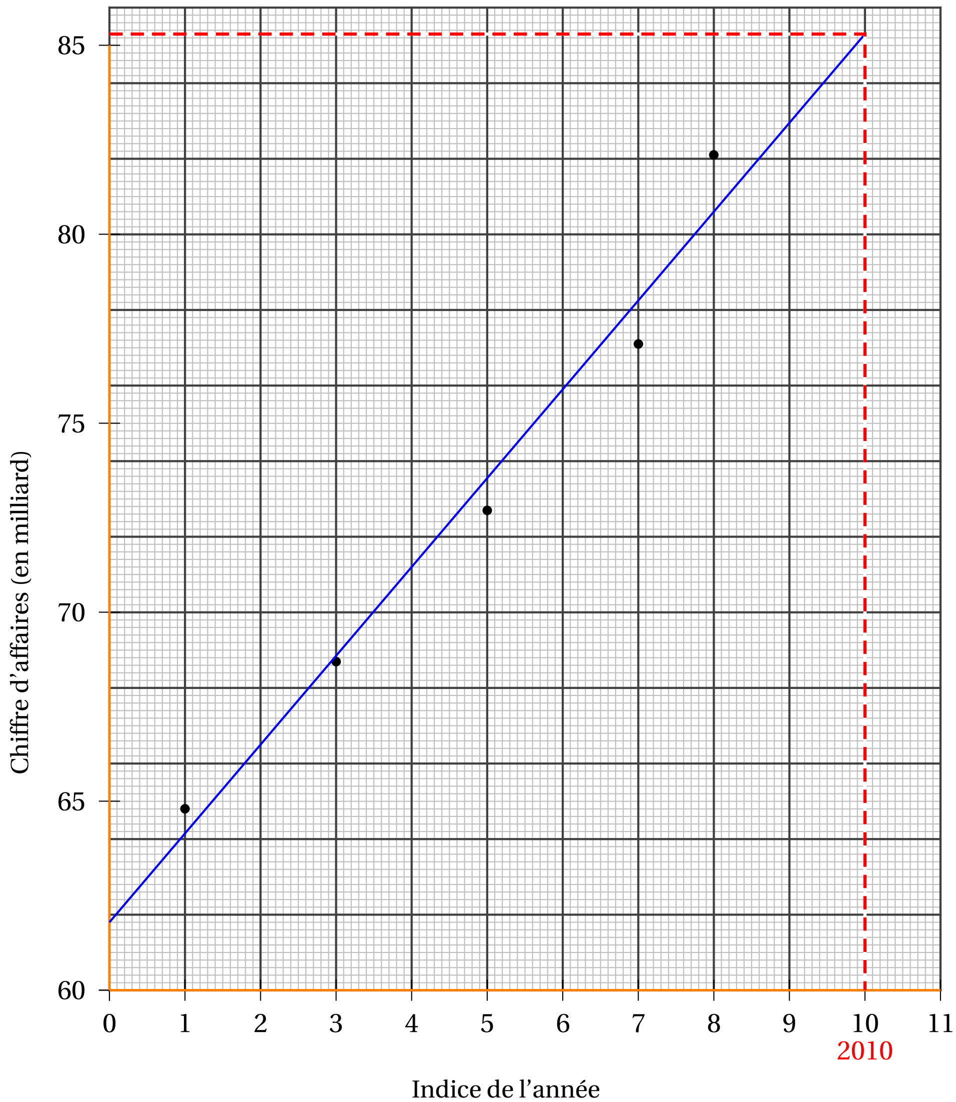
$$\begin{aligned}
(1+t_m)^5 &= (1+0,047)(1+0,106)(1+0,041)(1+0,058)(1+0,075)\\
(1+t_m)^5 &\approx 1,371\\
1+t_m &\approx 1,371^{\frac{1}{5}}\\
1+t_m &\approx 1,065\\
t_m &\approx 0,065
\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Le taux moyen d'augmentation est de 0,065 c'est à dire } 6,5\%.}$

   b. Entre 2008 et 2010, le chiffre d'affaires va être multiplié par $\left(1+\frac{6,5}{100}\right)^2$.
   Donc $C_a = 59,5 \times 1,065^2 \approx 67,5$

   $\boxed{\text{On peut estimer à 67,5 milliards d'euros le chiffre d'affaires du groupe pour l'année 2010}}$

2. **a.** *Graphique*



b. À l'aide de la calculatrice, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement affine est $y = 2,35x + 61,8$.

c. Graphiquement on peut lire que le chiffre d'affaires du groupe Aupré pour l'année 2010 sera 85,3 milliards d'euros

3. a. On a :

$$\begin{aligned}
59,5\times 1,065^n &> 82,1\times 1,03^n\\
\frac{1,065^n}{1,03^n} &> \frac{82,1}{59,5}\\
\left(\frac{1,065}{1,03}\right)^n &> \frac{82,1}{59,5}\\
n\ln\left(\frac{1,065}{1,03}\right) &> \ln\left(\frac{82,1}{59,5}\right)\\
n &> \frac{\ln\left(\frac{82,1}{59,5}\right)}{\ln\left(\frac{1,065}{1,03}\right)}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{82,1}{59,5}\right)}{\ln\left(\frac{1,065}{1,03}\right)} \approx 9,63$.

On a donc $\boxed{59,5\times 1,065^n > 82,1\times 1,03^n \text{ lorsque } n \geqslant 10}$

b. On en déduit que le chiffre d'affaires du groupe Enville dépassera celui du groupe Aupré au bout de 10 années c'est à dire à partir de 2018.

Corrigé de Paul Duprat