Corrigé du baccalauréat ES Liban 2009 ES

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. Il faut que $x-2>0 \iff x>2$; on cherche donc les solutions sur $[2\,;\,+\infty[$.
   $\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(2x+1) \iff \ln[(x+4)(x-2)]=\ln 2x+1 \iff (x+4)(x-2)=2x+1 \iff x^2+4x-2x-8=2x+1 \iff x^2-9=0 \iff (x+3)(x-3)=0 \iff x=-3$ ou $x=3$.

   La solution -3 n'est pas valable ; il y a donc une seule solution 3.
2. Le A est faux : f décroit sur $[0\,;\,4]$, alors que g décroit sur $[0\,;\,2]$.

   Si f est la dérivée de g, $f(x)<0$ sur $[0\,;\,6]$: la fonction g serait décroissante sur cet intervalle ce qui est faux.

   Reste f est une primitive de la fonction g qui est plausible ; g est négative sur $[0\,;\,4]$ donc f est décroissante sur cet intervalle et ensuite croissante.
3. Par composition des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ entreaîne que $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln[f(x)]=-\infty$.
4. On a $\displaystyle\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^{0}=\mathrm{e}^{-0}-\mathrm{e}^{-(-1)}=1-\mathrm{e}^{1}=1-\mathrm{e}$.

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

1.

   On peut dresser un tableau pour un total de 100 chemisiers :

bouton \ coloris	défaut	pas de défaut	Total
défaut	2	1	3
pas de défaut	2	95	97
Total	4	96	100 \ 100

   On a $p(\mathrm{D})=p(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=p(\mathrm{B})+p(\mathrm{C})-p(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=0,04+0,03-0,02=0,05$.

   Dans le tableau $2+1+2=5$ sur 100 ont au moins un défaut.
2. $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{B})=\dfrac{p(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})}{p(\mathrm{C})}=\dfrac{0,02}{0,03}=\dfrac{2}{3}$.

3. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 2$ et $p = p(\text{B}) = 0,03$.

La probabilité que sur les deux chemisiers choisis, un seul ait un bouton manquant est :

$0,03 \times (1 - 0,03) = 0,03 \times 0,97 = 0,291$.

4. **a.**

nombre de défauts	0	1	2
prix de vente	40	32	20
probabilité	0,95	0,03	0,02

b. L'espérance de la variable aléatoire prix de vente est :

$\text{E} = 40 \times 0,95 + 32 \times 0,03 + 20 \times 0,02 = 38 + 0,96 + 0,2 = 39,16$ € ; ceci représente le prix moyen de vente d'un chemisier pour un grand nombre de ventes, donc pour 100 chemisiers le chiffre moyen devrait être de 3 916 €.

Exercice 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-3) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{e}^x = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. En dérivant le produit :

$f'(x) = 1\text{e}^x + (x-3)\text{e}^x = \text{e}^x(1 + x - 3) = (x-2)\text{e}^x$.

c. Comme $\text{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 2$:

- si $0 \leqslant x < 2$, $x - 2 < 0$: la dérivée est négative donc la fonction est décroissante de $f(0) = 10 + (-3) \times 1 = 7$ à $f(2) = 10 - \text{e}^2 \approx 2,61$;
- si $x > 2$, $x - 2 > 0$: la dérivée est positive donc la fonction est croissante de $f(2)$ à plus l'infini.

d. On constate que pour tout x positif la fonction est positive : $f(x) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$

2. **a.** On a $G'(x) = 1 \times \text{e}^x + (x-4)\text{e}^x = \text{e}^x(1 + x - 4) = (x-3)\text{e}^x = g(x)$.

Donc G est bien une primitive de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Comme $f(x) = 10 + g(x)$, une primitive de f est la fonction F définie par :

$F(x) = 10x + G(x) + C = 10x + (x-4)\text{e}^x + K$, avec $K \in \mathbb{R}$.

c. Comme $F'(x) = 10 + g(x) = f(x) > 0$, la dérivée de F étant supérieure à zéro, la fonction F est strictement croissante.

Partie B

1. On a vu qu'une primitive de $f(x)$ est $F(x) = 10x + (x-4)\mathrm{e}^x + K$.

Les coûts fixes, soit pour $x = 0$ objets produits sont égaux à 20 000 €, ou 20 milliers d'euros soit :

$F(0) = 20 \iff -4 + K = 20 \iff K = 24$.

Donc pour $x \in [0~;~4]$, $C(x) = 10x + (x-4)\mathrm{e}^x + 24$.

2. **a.** On veut que $f(x) = 11{,}292 \iff 10 + (x-3)\mathrm{e}^x = 11{,}292$.

Or on a vu dans la partie A que sur l'intervalle $[2~;~4]$, la fonction f est croissante de $f(2) = 2,61$ milliers d'euros à $f(4) = 10 + 1\mathrm{e}^4 \approx 64,6$ milliers d'euros.

Comme la fonction f est continue car dérivable sur $[2~;~4]$, strictement croissante est que $7\,000 < 11\,292 < 64\,600$, il existe un réel unique $x_0 \in [0~;~4]$ tel que $f(x_0) = 11,292$.

b. La calculatrice donne :

$f(3) = 10$ et $f(4) \approx 64,6$, donc $3 < x_0 < 4$;

$f(3) = 10$ et $f(3,1) \approx 12,22$, donc $3 < x_0 < 3,1$;

$f(3,06) \approx 11,28$ et $f(3,07) \approx 11,29$, donc $3,06 < x_0 < 3,07$;

$f(3,060) \approx 11,28$ et $f(3,061) \approx 11,302$, donc $3,060 < x_0 < 3,061$.

Soit en kilos : $3\,060 < x_0 < 3\,061$.

c. Pour $x = 3,06$, $C(3,06) \approx 2\,014{,}55$ et $\dfrac{C(3,06)}{3,06} \approx 658,35$.

Pour $x = 3,061$, $C(3,061) \approx 2\,014{,}56$ et $\dfrac{C(3,06)}{3,06} \approx 658,14$.

Le coût moyen de fabrication par tonne est à l'euro près 658 €.

Exercice 4 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $\dfrac{348-7}{7} \times 100 = \dfrac{341}{7} \times 100 \approx 4\,871\,\%$ d'augmentation de la production entre 2000 et 2007.

b. Il faut trouver le nombre t tel que :

$(1+t)^7 = 4871 \iff 1+t = 4871^{\frac{1}{7}} \iff t = 4870^{\frac{1}{7}} - 1 \approx 74,72$.

Le pourcentage annuel moyen d'augmentation sur la période 2000-2006 est 74,72 %.

c. Avec cette valeur la production en 2005 aurait du être : $7 \times 1,7472^5 \approx 113,975$ Ktep ; elle n'a été que de 83 soit une erreur de :

$\dfrac{113,975-83}{83} \approx 37,32\,\%$.

2. On pose $z = \ln y$.

a.

x_i	0	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$	1,95	3,14	3,53	3,93	4,42	5,24	5,85

b. La calculatrice donne avec des coefficients arrondis au centième : $z = 0,54x + 1,92$.

c. On a $z = \ln y = 0,54x + 1,92 \iff y = \mathrm{e}^{0,54x+1,92} = \mathrm{e}^{0,54x} \times \mathrm{e}^{1,92}$.

Or $\mathrm{e}^{1,92} \approx 6,820$, donc $y = 6,82 \times \mathrm{e}^{0,54x} = 6,82 \times \left(\mathrm{e}^{0,54}\right)^x \approx 6,82 \times 1,716^x$, soit en arrondissant au centième :

$y = 6,82 \times 1,72^x$.

d. 2005 correspond au rang $x = 5$, d'où une production de $y = 6,82 \times 1,72^x 5 \approx 102,6$ soit à peu près 103 Ktep.

3. a. Voir le graphique à la fin. On lit à peu près 900 Ktep.

b. On part de l'ordonnée $348 \times 10 = 3480$; la ligne horizontale coupe la droite en un point ddont l'abscisse est à peu près 11,5. Il faut prendre $x = 12$, donc attendre 2012.

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. $z_A = \sqrt{2 \times 20 \times 40} = \sqrt{1600} = 40$;

$60 = \sqrt{2 \times 60 y_B} \iff 3600 = 120 y_B v \iff y_B = 30$.

b.

c. Voir à la fin.

d. Les points ont des coordonnées qui vérifient $z = 50$ et $\sqrt{2xy} = 50 \Rightarrow 2xy = 2500 \iff y = \dfrac{1250}{x}$: c'est une hyperbole.

2. **a.** Le coût hebdomadaire est égal à $15x+30y$.

On a donc $15x+30y=2400 \iff 5x+10y=800 \iff x+2y=160 \iff 2y=160-x \iff y=-\dfrac{1}{2}x+80$.

b. $(\mathscr{E})$ est un plan parallèle à l'axe Oz.

c. Voir la figure.

L'intersection du plan $(\mathscr{E})$ avec le plan xOy est une droite contenant les points de coordonnées (0 ; 80) et (120 ; 20).

d. On voit sur le dernier graphique que la cote la plus grande correspond au point où la surface $\mathscr{S}$ coupe le plan $\mathscr{P}$. On voit que ce point a pour coordonnées (80 ; 40), ce qui correspond à une surface de $z=\sqrt{2\times 80\times 40}=\sqrt{6400}=80$, soit 8 000 m^2.

3. **a.** On a avec $0\leqslant x\leqslant 120$, $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -\dfrac{1}{2}x+80 \\ z=\sqrt{2xy} & & \end{array}\right. \iff$

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -\dfrac{1}{2}x+80 \\ z & = & \sqrt{2x\left(-\dfrac{1}{2}x+80\right)} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & -\dfrac{1}{2}x+80 \\ z & = & \sqrt{-x^2+160x} \end{array}\right.$$

b. La fonction g est dérivable sur [0 ; 120] et sur cet intervalle :

$g'(x)=\dfrac{-2x+160}{2\sqrt{-x^2+160x}}=\dfrac{80-x}{\sqrt{-x^2+160x}}$.

Comme $\sqrt{-x^2+160x}>0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $80-x$:

- si $x<80$, alors $g'(x)>0$, la fonction est croissante sur [0 ; 80] ;
- si $x>80$, alors $g'x)<0$, la fonction est décroissante sur [80 ; 120]
- si $x=80$, alors $g'(80)=0$, $g(80)$ est donc le maximum de la fonction sur [0 ; 120].

c. $g(80)=\sqrt{160\times 80-80^2}=\sqrt{12800-6400}=\sqrt{6400}=80$centaines de m^2, soit 8 000 m^2.

Pour un coût de 2 400 €, on peut traiter un maximum de 8 000 m^2 pour 80 heures de travail salarié et 40 heures de location de matériel.

ANNEXE

Enseignement de spécialité : exercice 4

Figure 1 :

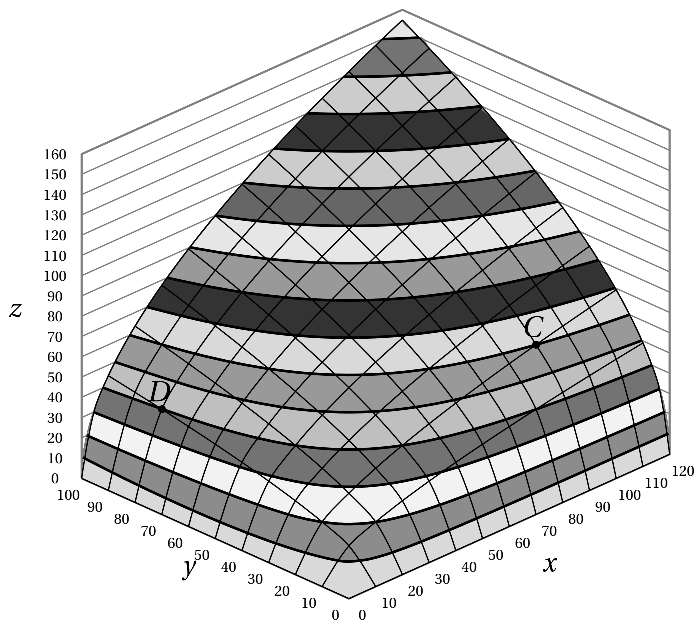
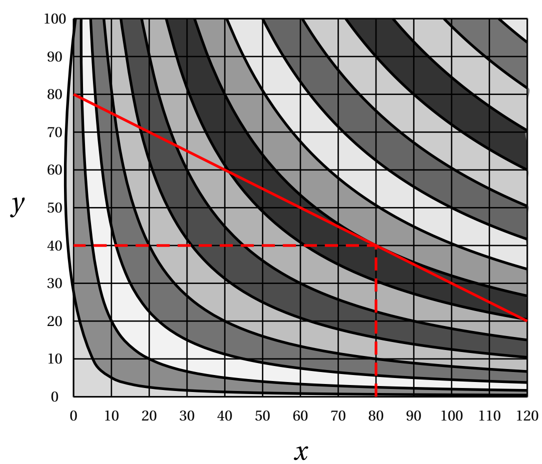


Figure 2 :



Annexe

À remettre avec la copie

Enseignement obligatoire : exercice 4