Corrigé du baccalauréat ES La Réunion 21 juin 2011

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Comme $\exp(x) > 0$ quel que soit le réel x, $\ln[\exp(x)]$ existe et est égal à x. Réponse **B.**
2. Ici $\ln(x)$ n'est définie que pour $x > 0$: réponse **C.**
3. Épreuve de Bernouilli avec $p = \dfrac{1}{2}$ et $n = 4$.

   La probabilité d'avoir 0 pile est égale à $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$; donc la probabilité d'avoir au moins un pile est égale à $1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$. Réponse **B.**
4. $\ln(3-x) \leqslant 0 \iff \mathrm{e}^{\ln(3-x)} \leqslant \mathrm{e}^0$ (par croissance de la fonction exponentielle) ou $3 - x \leqslant 1 \iff x \geqslant 2$.

   Comme $\ln(3-x)$ n'existe que si $x \leqslant 3$, l'ensemble solution est l'intervalle $[2~;~3]$. Réponse **B.**
5. Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -2 + \frac{1}{x} = -2$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\left(-2+\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}^{-2}$.
   Réponse **C.**
6. La fonction n'est pas définie pour $x = 1$. Cette équation est celle d'une asymptote verticale. D'autre part au voisinage de l'infini la limite de $g(x)$ est égale à 2 : la droite $y = 2$ est asymptote horizontale. Réponse **C.**
7. On a sur $]0~;~+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 = \dfrac{2-x}{x}$. Réponse **A.**

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Voir à la fin

   Élèves de terminale : $\dfrac{1}{4} \times 2\,000 = 500$;

   Élèves de première : $\dfrac{35}{100} \times 2\,000 = 700$; il reste donc $2\,000 - (500 + 700) = 800$ élèves en seconde.

   Nombre d'élèves de terminale utilisant internet : $\dfrac{70}{100} \times 500 = 350$;

   Nombre d'élèves de seconde utilisant internet : par différence : $1\,740 - (350 + 630) = 760$.
2. On a $p = \dfrac{760}{2\,000} = \dfrac{76}{200} = \dfrac{38}{100} = 0,38$.
3. On a $P(T) = \dfrac{1}{4} = 0,25$ et $P_T(I) = \dfrac{P(T \cap I)}{P(T)} = \dfrac{\frac{350}{2000}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{350}{500} = \dfrac{70}{100} = 0,7$.

   C'est la probabilité qu'un élève de terminale rencontré au hasard utilise internet : cette donnée est dans l'énoncé !
4. Sur 2 000 élèves 260 n'utilisent pas internet régulièrement :
   $p\left(\overline{I}\right) = \dfrac{260}{2000} = \dfrac{13}{100} = 0,13$.
5. Sur les 1 740 utilisateurs réguliers il y a 630 élèves de première ; la probabilité est donc égale à $P_I(E) = \dfrac{630}{1\,740} = \dfrac{3 \times 10 \times 21}{3 \times 58 \times 10} = \dfrac{21}{58}$.

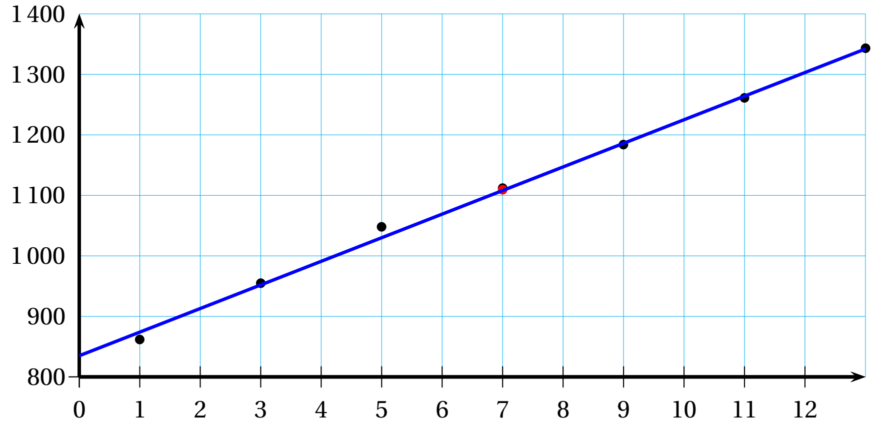
6. À chaque tirage la probabilité de choisir un utilisateur régulier d'internet est égale à $\dfrac{1740}{2000} = \dfrac{174}{200} = \dfrac{87}{100} = 0,87$.
On a trois épreuves de Bernoulli indépendantes. Les différentes possibilités favorables sont : $I\overline{I}\overline{I}$, $\overline{I}I\overline{I}$ et $\overline{I}\overline{I}I$.La probabilité de tomber sur exactement un utilisateur régulier est :
$3 \times 0,87 \times (1-0,87)^2 = 3 \times 0,87 \times 0,13^2 = 2,61 \times 0,0169 = 0,044\,109 \approx 0,044$. (moins de 5 %)

EXERCICE 3 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A – Un ajustement affine

1.



2. On a $\dfrac{1+3+5+7+9+11+13}{7} = 7$ et $\dfrac{862+955+1048+1112+1184+1261+1343}{7} \approx 1\,109{,}3$. Donc G(7 ; 1 109,3) (point rouge)

3. En arrondissant les coefficients à l'unité la calculatrice donne $y = 39x + 385$.

4. 2012 correspond à une abscisse de 22. On aura donc à peu près :
$y = 39 \times 22 + 835 = 1693$.

Partie B – Un nouvel ajustement

1. Chaque année le nombre d'hypermarchés est multiplié par $1 + \dfrac{3,2}{100} = 1 + 0,032 = 1,032$. Donc en 2012, il y aura $1112 \times 1,032^{15} \approx 1\,784$ hypermarchés.

2. En partant de 1997 et en supposant une augmentation annuelle de 3,02 %, il faut trouver n tel que :
$1\,112 \times 1,032^n \geqslant 2000 \iff 1,032^n \geqslant \dfrac{2\,000}{1\,112} \iff \ln(,032^n) \geqslant \ln\left(\dfrac{2\,000}{1\,112}\right) \iff$
$n \ln 1,032 \geqslant \ln\left(\dfrac{2\,000}{1\,112}\right) \iff n \geqslant \dfrac{\ln \frac{2\,000}{1\,112}}{\ln 1,032} \approx 18,6$.
Il faut donc attendre 19 ans ; le nombre d'hypermarchés dépassera 2 000 en 2016.

EXERCICE 3 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.**

   Voir sur l'annexe.

   b. On a $z = 2 \times 6^2 + 2^2 - 6 \times 2 + 6 \times 6 = 72 + 4 - 12 + 36 = 100$.

   Ceci signifie que lorsque l'artisan vend 600 litres de glace et 200 litres de sorbet le coût total de production est 1 000 €.

   c. On a $z = 2x^2 + 16 - 4x + 6x = 2x^2 + 2x + 16$.

   C'est une partie de parabole avec $0 \leqslant x \leqslant 10$. Voir la courbe en rouge.

   a. $x + y = 10$ est l'équation d'un plan parallèle à l'axe $(\text{O}z)$. La projection orthogonale de ce plan sur le plan $(x\text{O}y)$ est la droite d'équation $y = 10 - x$. Voir la figure 2.

   b. $z = 2x^2 + y^2 - xy + 6x$ et $y = -x$ donne

   $z = 2x^2 + (10 - x)^2 - x(10 - x) + 6x = 2x^2 + 100 + x^2 - 20x - 10x - x^2 + 6x = 4x^2 - 24x + 100$, avec $0 \leqslant x \leqslant 10$ (c'est donc un arc de parabole).

   On sait que le trinôme $4x^2 - 24x + 100$ a pour minimum la valeur obtenue pour $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-24}{2 \times 4} = 3$.

   Le coût minimum est donc égal à :

   $z(3) = 2 \times 3^2 - 24 \times 3 + 100 = 48$.

   Conclusion : pour 300 litres de glace, 700 litres de sorbet le coût minimum est de 480 €.

ANNEXE 2 de l'exercice 3

Figure 1

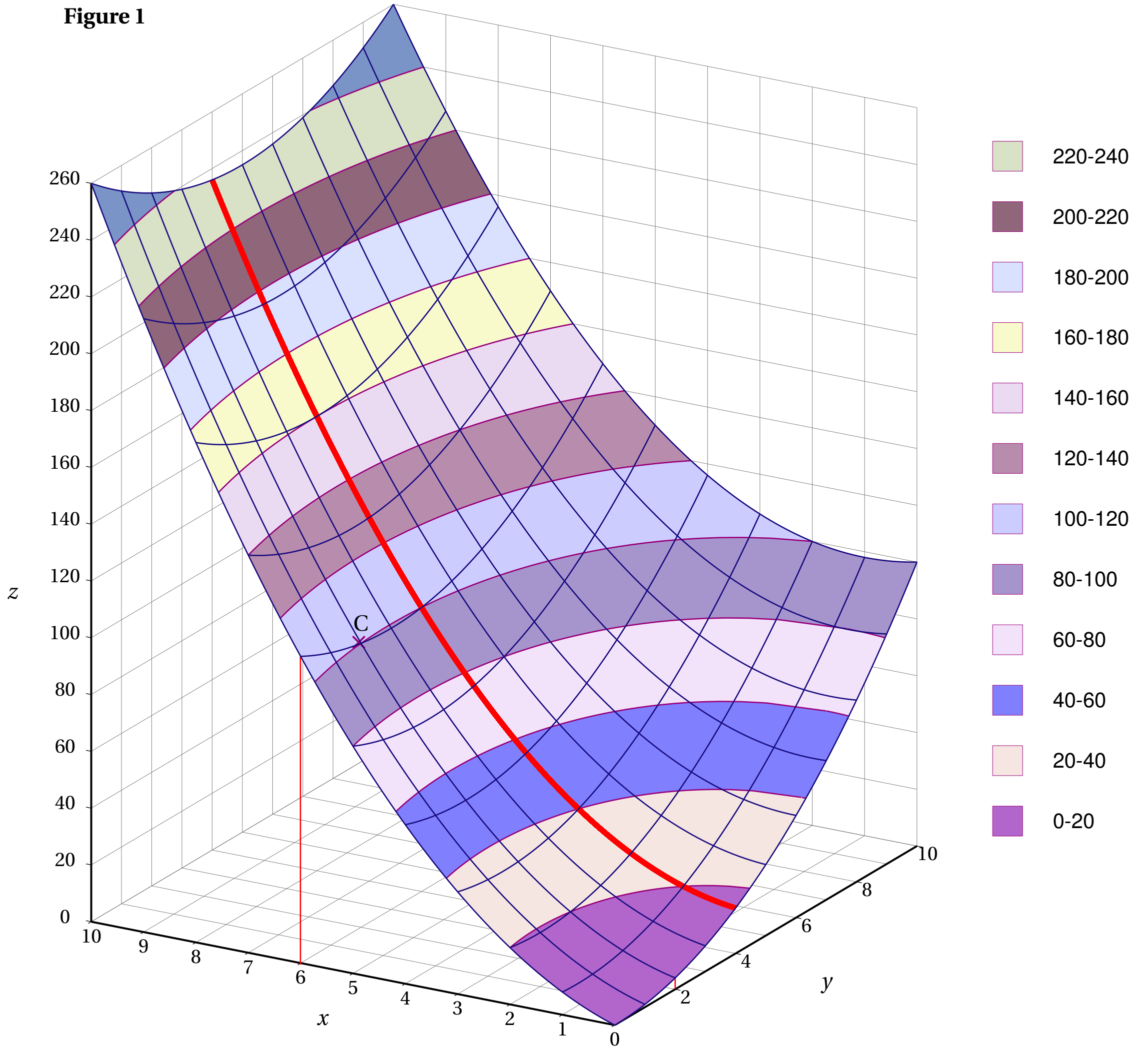
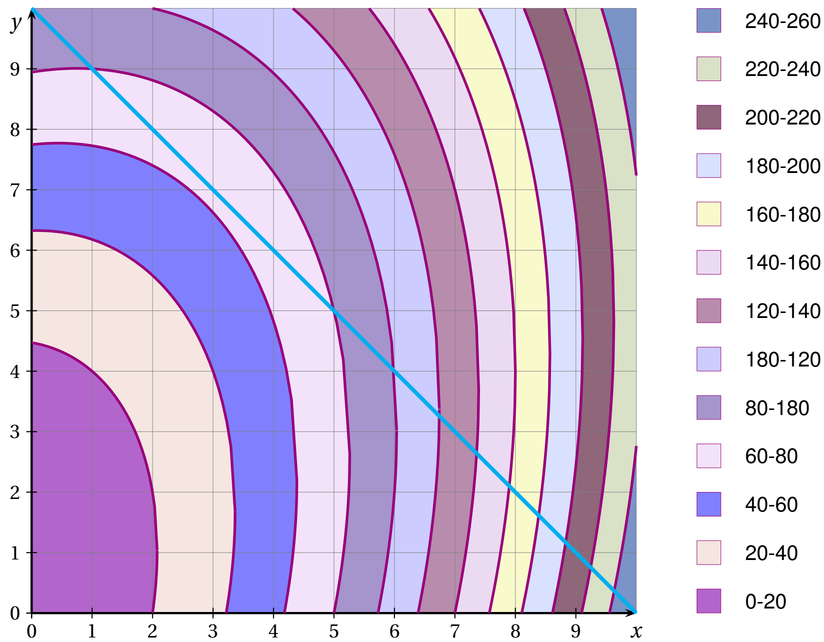


Figure 2



EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - 3\ln(x-2).$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

1. **a.** Donner On lit : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b. On a $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 3x + 2 = 0$; $\lim\limits_{x\to 2} (x-2) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 2} \ln(x-2) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.

2. **a.** On sait que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, donc :

   $f'(x) = 2x - 3 - 3\times\dfrac{1}{x-2} = \dfrac{(2x-3)(x-2)-3}{x-2} = \dfrac{2x^2-4x-3x+6-3}{x-2} = \dfrac{2x^2-7x+3}{x-2} = \dfrac{(x-3)(2x-1)}{x-2}$.

   b. Le dénominateur de la dérivée étant positif, le signe de la dérivée est celui de $(x-3)(2x-1)$.

   La dérivée est donc nulle pour $x = \dfrac{1}{2}$ et pour $x = 3$, est négative sur $\left]\dfrac{1}{2}\ ;\ 3\right[$, donc sur $[2\ ;\ 3]$ et positive ailleurs.

   c. On déduit du résultat précédent le tableau de variation de f :

x	2		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

3. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln(x-2)$.

   a.

   $$G(x) = (x-2)\ln(x-2) - x.$$

   La fonction G est dérivable sur $]2\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

$G'(x) = \ln(x-2) + (x-2) \times \dfrac{1}{x-2} - 1 = \ln(x-2) + 1 - 1 = \ln(x-2) = g(x)$.

Donc G est une primitive de g sur $]2~;~+\infty[$.

b. On en déduit une primitive F de f sur $]2~;~+\infty[$:

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3\dfrac{x^2}{2} + 2x - 3[(x-2)\ln(x-2) - x)] = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 5x - 3(x-2)\ln(x-2)$.

c. Voir la figure.

d. Sur l'intervalle $[3~;~4]$, la fonction f est positive donc l'aire en unités d'aire de la surface est égale à :

$\displaystyle\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_3^4 = F(4) - F(3) =$

$\dfrac{64}{3} - 24 + 20 - 6\ln 2 - \left(9 - \dfrac{27}{2} + 15 - 0\right) = \dfrac{64}{3} + \dfrac{27}{2} - 28 - 6\ln 2 = \dfrac{41}{6} - 6\ln 2$.

cette aire vaut approximativement 2,67 unités d'aire.(ce que l'on peut voir sur la figure)

Annexe 1 de l'exercice 2

	Seconde	Première	Terminale	Total
Utilise internet régulièrement	760	630	350	1 740
N'utilise pas internet régulièrement	40	70	150	260
Total	800	700	500	2 000

Annexe 2 de l'exercice 4