Corrigé du baccalauréat ES La Réunion 23 juin 2010

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$
2. $y = 2$ au voisinage de plus l'infini.
3. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$
4. Tableau n° 2.
5. On a $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$, donc $f'(1) = \dfrac{1}{4}$.
6. Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par : par $F(x) = 2x - \ln(x+1)$.
   Donc comme la fonction est positive sur $[0\,;\,1]$, l'aire est égale à :
   $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = 2 \times 1 - \ln(1+1) - [2 \times 0 - \ln(0+1)] = 2 - \ln 2.$

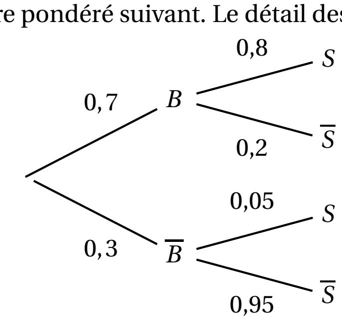
EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un chalutier se rend sur sa zone de pêche. La probabilité qu'un banc de poissons soit sur cette zone est de 0,7. Le chalutier est équipé d'un sonar pour détecter la présence d'un banc de poissons. Si un banc est présent, le sonar indique la présence du banc dans 80 % des cas. S'il n'y pas de banc de poissons dans la zone de pêche, le sonar indique néanmoins la présence d'un banc dans 5 % des cas.

On note :

B l'évènement : « il y a un banc de poissons sur zone » et $\overline{B}$ l'évènement contraire de B,
S l'évènement : « le sonar indique l'existence d'un banc de poissons » et $\overline{S}$ l'évènement contraire de S.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant. Le détail des calculs n'est pas demandé.



2. $p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$.
3. On a $p\left(\overline{B} \cap S\right) = p\left(\overline{B}\right) \times p_{\overline{B}}(S) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(S) = p(B \cap S) + p\left(\overline{B} \cap S\right) = 0,56 + 0,015 = 0,575$.

4. a.

Gain : x_i	2 000	−500	−300
Probabilité : p_i	0,56	0,015	0,425

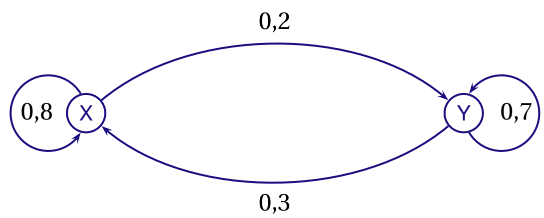
b. L'espérance mathématique de la variable aléatoire « gain est égale à :
$2\,000 \times 0,56 - 500 \times 0,015 - 300 \times 0,425 = 985$.
Le gain moyen (sur un grand nombre de sorties est égal à 985 €.

5. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = p\left(\overline{S}\right) = 1 - p(S) = 1 - 0,575 = 0,425$.
La probabilité que le sonar reste muet est égale à $0,425^3 = 076\,765\,625 \approx 0,077$.

Exercice 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1.



La matrice de transition de ce graphe avec X et Y dans cet ordre est $M = \begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,3 & 0,7\end{pmatrix}$.

2. **a.** On a $E_2 = E_0 \times M^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,3 & 0,7\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0,7 & 0,3\end{pmatrix}$.
Donc la proportion de fumeurs à l'issue de deux trimestres est $0,7$.

b. $E_4 = E_0 \times M^4 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,3 & 0,7\end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix}0,625 & 0,375\end{pmatrix}$.

3. Les termes de la matrice M étant non nuls on sait que l'état E_n converge vers un état stable $E = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ tel que $E = EM$ et tels que $x + y = 1$.. On a donc x et y qui vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0,8x+0,3y\\ y &=& 0,2x+0,7y\\ x+y &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,2x-0,3y &=& 0\\ -0,2x+0,3y &=& 0\\ x+y &=& 1\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0,2x-0,3y &=& 0\\ x+y &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x-3y &=& 0\\ 3x+3y &=& 3\end{array}\right. \Rightarrow 5x = 3 \iff x = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ et par conséquent}$$

$y = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$.
L'état stable est $E = \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}$.
La proportion de fumeurs sera égale à 60 %.

Partie B

1. **a.** On a $z = xy = 1\,000 \times 5 = 5\,000$ €.

b. Avec $z = xy$ et $z = 5$, on en déduit que $y = \frac{5}{x}$.

Il faut résoudre l'équation $600x = 5\,000 \iff x = \frac{5\,000}{600} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3} \approx 8,333 \approx 8,33$ €.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. **a.** Entre 1950 et 1960, augmentation de $3\,023 - 2\,529 = 494$;
Entre 1970 et 2000, augmentation de $4\,438 - 3\,686 = 752$;
Entre 1990 et 1980, augmentation de $6\,115 - 5\,290 = 825$.
L'accroissement n'est pas proportionnel au temps : l'ajustement affine ne semble pas pertinent.

b. Augmentation de la population mondiale entre les années 1990 et 2000 en pourcentage :
$\dfrac{6\,115 - 5\,290}{5\,290} \times 100 = \dfrac{825}{5\,290} \times 100 = \dfrac{8\,250}{529} = \dfrac{825}{529} \approx 15,559 \approx 15,6\,\%$.

2. **a.**

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$	7,84	8,01	8,21	8,4	8,57	8,72	8,84

b. Voir l'annexe 1 plus bas

3. **a.** La calculatrice livre : $z = 0,171x + 7,687$ avec des coefficients arrondis au millième.

b. Voir à la fin.

4. Ob a donc $z = \ln y = 0,171x + 7,687 \iff y = \mathrm{e}^{0,171x+7,687} = \mathrm{e}^{7,687} \times \mathrm{e}^{0,171x}$.
Or $\mathrm{e}^{7,687} \approx 2\,180$, donc $y \approx 2\,180\mathrm{e}^{0,171x}$.

5. 2030 correspond à $x = 9$, d'où $y = 2\,180\mathrm{e}^{0,171\times 9} = 2\,180\mathrm{e}^{1,539} \approx 10\,158,6$.
D'après cet ajustement exponentiel la population mondiale en 2030 sera aux environs des 10 159 millions d'habitants.

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

1. **a.** Comme $f(x) = 2 \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$, d'après le rappel $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. On a $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 2x \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-x}(1-x)$.
Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, $f'(x)$ a le signe de $1 - x$.
Donc pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante sur $[0;1]$ de $f(0) = 0$ à $f(1) = 2\mathrm{e}^1 \approx 0,736$ et décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$ de $f(1) = 2\mathrm{e}^1$ à 0.

2. On a $f(5) = 10\mathrm{e}^{-5} \approx 0,067$: ce taux est effectivement négligeable.

a. La fonction F est dérivable sur $[0;5]$ et sur cet intervalle :
$F'(\S x) = -2\mathrm{e}^{-x} + (-2-2x) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(-2+2+2x) = 2x\mathrm{e}^{-x} = f(x)$: F est bien une primitive de f sur $[0;5]$.

b. La valeur moyenne du taux de gaz sur l'intervalle $[0;5]$ est égal à :
$m = \dfrac{1}{5-0}\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}[F(x)]_0^5 = \dfrac{1}{5}\left[(-2-2\times 5)\mathrm{e}^{-5} - \left((-2-2\times 0)\mathrm{e}^{-0}\right)\right] =$
$\dfrac{1}{5}\left(-12\mathrm{e}^{-5} + 2\right) = \dfrac{1}{5}\left(2 - \mathrm{e}^{-5}\right) \approx 0,398$.
La valeur moyenne sur les cinq premières minutes est égale à 0,40 ppm au centième près.

3. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**

La calculatrice permet de concret que $f(0,582) \approx 0,650\,42$ et que $f(1,583) \approx 0,650\,164$ et $1,583 - 0,582 = 1,001$ ce qui dépasse la minute : le personnel de l'usine a été affecté.

ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)

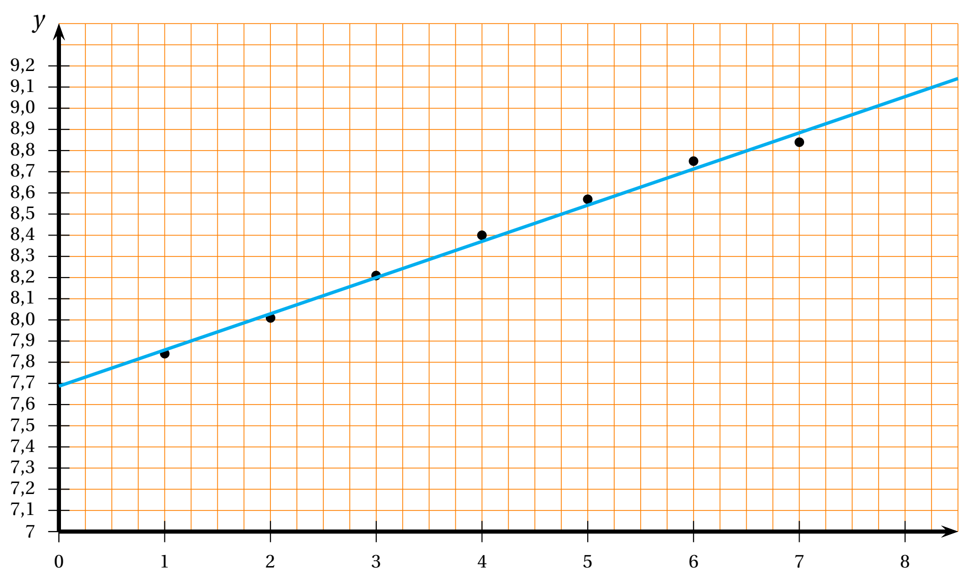
EXERCICE 3 (commun à tous les candidats)

Question 2 :

Tableau à compléter :

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

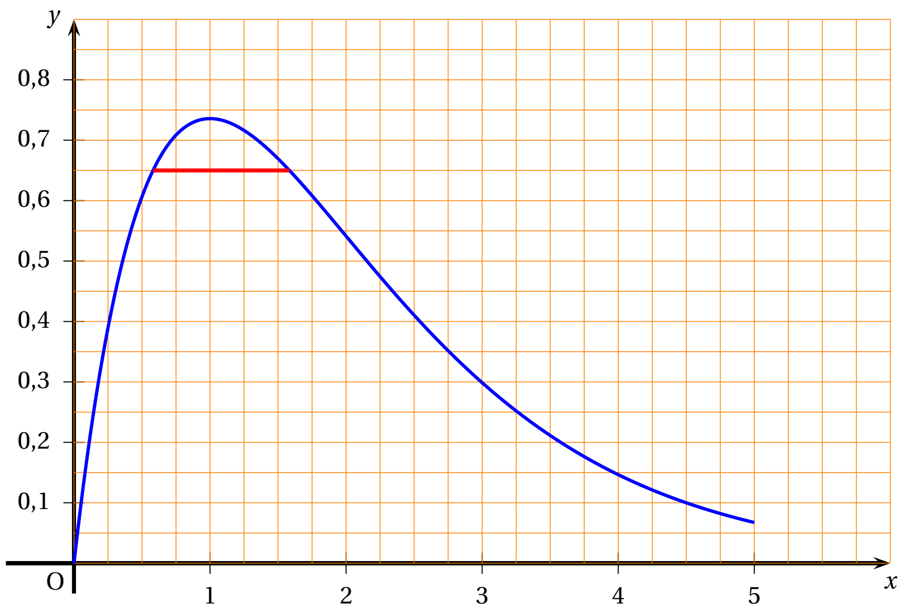
Représentation du nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ z_i)$:



ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

Exercice 4 (commun à tous les candidats)

Représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.



ANNEXE 1 - Exercice 2 (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Ligne de niveau $z = 5$ de la surface S.