Corrigé du baccalauréat ES La Réunion
19 juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B) = 0,23+0,56-0,11 = 0,79-0,11 = 0,68$.

2. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} -\ln x = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to 0} 1-\ln x = +\infty$.

3. Si t est l'augmentation annuelle moyenne, on a :
$(1+t)^{10} = 2 \iff 1+t = 2^{\frac{1}{10}} \iff t = 2^{\frac{1}{10}} - 1 \approx 0{,}0717$ soit 7 % à l'unité près.

4. On a $\left[\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+5\right]' = \dfrac{1}{3}\times 3\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

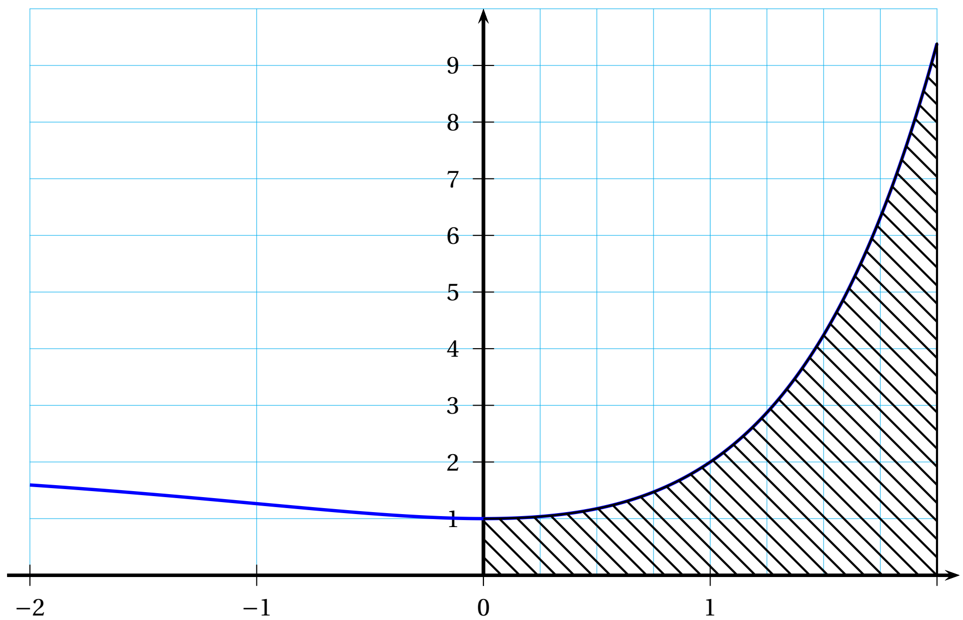
1. $f(0) = (0-1)\mathrm{e}^0+2 = -1+2 = 1$;
$f(-2) = (-2-1)\mathrm{e}^{-2}+2 = -3\mathrm{e}^{-2}+2 \approx 1,59$;
$f(2) = (2-1)\mathrm{e}^2+2 = 2+\mathrm{e}^2 \approx 9,39$.

2. On a $f'(x) = 1\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$.
Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de x. Donc
- sur $[-2\,;\,0[$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante d'environ 1,59 à 1 ;
- sur $[0\,;\,2[$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante de 1 à environ 9,39.

3. Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est :
$y - f(1) = f'(1)(x-1)$; or f(1) $= 2 et f'(1) = 1\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. L'équation s'écrit donc :
$y-2 = \mathrm{e}(x-1) \iff y = \mathrm{e}x+2-\mathrm{e}$.
Cette droite contient bien entendu le point A et si $x = 0$, $y = 2-\mathrm{e}$: elle contient aussi B.

4. Voir à la fin de l'exercice.

5. On a vu à la question **2.** que sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$, $f(x) \geqslant 1 > 0$, donc l'aire de la surface $\mathscr{A}$ est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^2 = F(2)-F(0) = (2-2)\mathrm{e}^2+2\times 2-\left[(0-2)\mathrm{e}^0+2\times 0\right] = 4+2 =$ 6 unités d'aire.
Or l'unité d'aire est égale à $4\times 1 = 4$ cm^2, donc l'aire de $\mathscr{A}$ est égale à $4\times 6 =$ 24 cm^2. (ce que l'on vérifie approximativement sur la figure)

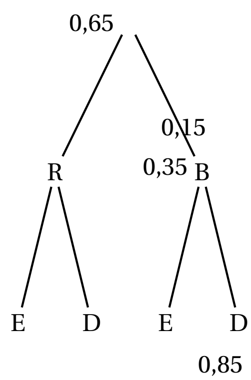


EXERCICE 3 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $p(R) = \dfrac{65}{100} = 0,65$.

2. **a.**



b. On a $p(R \cap D) = 0,273$.

Mais $p(R \cap D) = p(R) \times p_R(D) \iff 0,273 = 0,42 \times p_R(D) \iff p_R(D) = \dfrac{0,273}{0,65} = 0,42$.

$p(B \cap D) = p_B \times p_B(D) = 0,35 \times 0,85 = 0,2975$.

3. D'après la loi des probabilités totales :

$p(D) = p(R \cap D) + p(B \cap D) \quad (1)$.

Or $p(B \cap D) = p(B) \times p_B(D) = 0,35 \times 0,85 = 0,2975$.

L'égalité (1) devient : $p(D) = 0,273 + 0,2975 = 0,5705$.

4. On a $p(R) = p(R \cap E) + p(R \cap D) \iff p(R \cap E) = p(R) - p(R \cap D) = 0,65 - 0,273 = 0,377$.

De même $p(B) = p(B \cap E) + p(B \cap D) \iff p(B \cap E) = p(B) - p(B \cap D) = 0,35 - 0,2975 = 0,0525$.

D'où le tableau :

Version	Routière		Break	
Motorisation	Essence	Diesel	Essence	Diesel
x_i : prix de vente (en milliers d'euros)	15	18	17	20
P_i : probabilité	0,377	0,273	0,052 5	0,297 5

On a donc $\text{E} = 15\times 0,377+18\times 0,273+17\times 0,0525+20\times 0,2975 = 17,4115$ milliers d'euros.

Le prix de vente moyen d'un véhicule sur un grand nombre de ventes est de 17411,50 €.

EXERCICE 3 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une usine produit deux types E et F de moteurs.
Le bénéfice B, exprimé en milliers d'euros, pour une production journalière de x moteurs E et y moteurs F est :

$$B(x\ ;\ y) = -0,05x^2 - 0,08y^2 + 0,6x + 0,7y.$$

On admet que la production totale est vendue et que $0 \leqslant x \leqslant 10$; $0 \leqslant y \leqslant 8$.

1. Calculer le bénéfice réalisé avec :

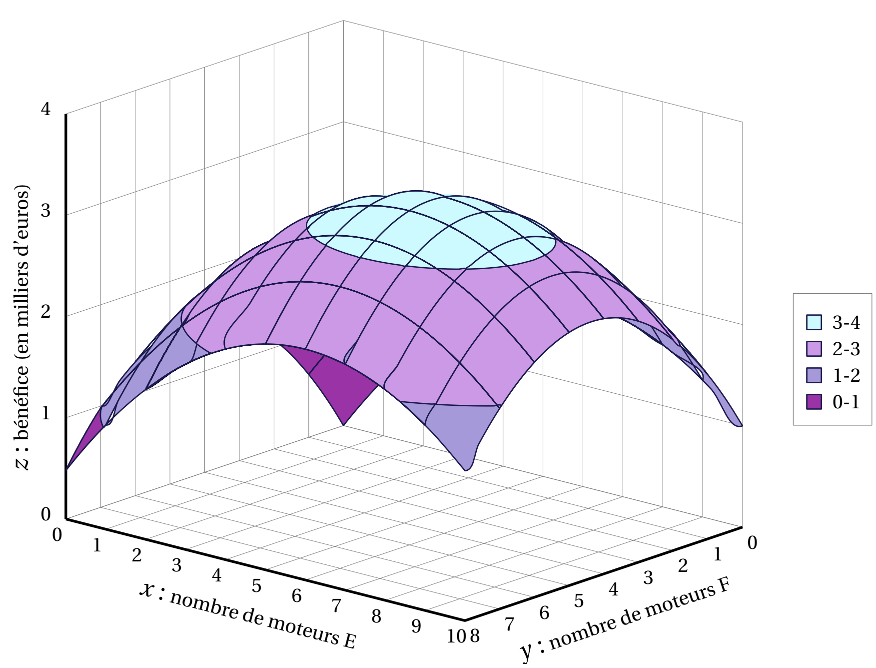
a. $B(7\ ;\ 5) = -0,05\times 7^2 - 0,05\times 5^2 + 0,6\times 7 + 0,7\times 5 = 4,2+3,5-2,45-1,25 =$ 4 milliers d'euros.

b. $B(10\ ;\ 0) = -0,05\times 10^2 + 0,6\times 10 = 6-5 = 1$ millier d'euro.

2. **a.** On voit que pour dépasser $z = 3$, il faut que $2 \leqslant y \leqslant 4$.

b. On voit que le nombre de moteurs F à produire doit être 3 ou 4.

Représentation graphique du bénéfice B



3. La demande contraint l'usine à fabriquer autant de moteurs E que de moteurs F. Dans ce cas :
   a. Si $y = x$, alors $B(x\,;\,y) = B(x\,;\,x) = -0,05x^2 - 0,08x^2 + 0,6x + 0,7x = 1,3x - 0,13x^2$.
   b. Cette production est un trinôme du second degré dont le maximum est obtenu pour $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1,3}{2\times(-0,13)} = \dfrac{10}{2} = 5$.
   Ce bénéfice maximal est donc égal à $B(5\,;\,5) = 1,3\times 5 - 0,13\times 5^2 = 6,5 - 3,25 = 3,25$, soit 3 250 €.

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

La calculatrice donne après arrondi au centième des coefficients : $y = 0,31x + 9,9$.

Partie B

1. En utilisant ces ajustements :
   a. Il faut résoudre l'inéquation :
   $0,3x + 10 \geqslant 14 \iff 0,3x \geqslant 4 \iff x \geqslant \dfrac{4}{0,3} \approx 13,33$ soit au moins $x = 14$, c'est-à-dire en 2014.
   b. Il faut résoudre l'inéquation :
   $\ln(3x+1) + 10 \geqslant 14 \iff \ln(3x+1) \geqslant 4 \iff 3x+1 \geqslant \mathrm{e}^4 \iff$
   $3x \geqslant \mathrm{e}^4 - 1 \iff x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^4-1}{3} \approx 17,9$ soit au moins $x = 18$, c'est-à-dire en 2018.
2. En dérivant la somme des fonctions :
   $f'(x) = \dfrac{3}{3x+1} - 0,3 = \dfrac{3 - 0,3(3x+1)}{xx+1} = \dfrac{3 - 0,9x - 0,3}{x+1} = \dfrac{2,7 - 0,9x}{3x+1}$.
   Comme $x \geqslant 0$, $3x+1 \geqslant 1 > 0$: le signe de $f'(x)$ est donc celui de $2,7 - 0,9x = 0,9(3-x)$.
   - si $x = 3$, $f'(3) = 0$;
   - si $x < 3$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur $[0\,;\,3]$;
   - si $x > 3$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur $[3\,;\,20]$.
3. On a vu que sur l'intervalle $[3\,;\,20]$ la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante de $f(3) = \ln(9+1) - 0,3\times 3 = \ln 10 - 0,9 \approx 1,4$ à $f(20) = \ln 61 - 6 \approx -1,9$: d'après le théorème de la valeur intermédiaire f s'annule en un seul point $\alpha \in [3\,;\,20]$
   La calculatrice donne :
   $f(12) \approx 0,01$ et $f(13) \approx -0,2$, donc $12 < \alpha < 13$.
4. a. $d(x)$ représente la différence entre les départs et les arrivées dans la ville.
   Le maximum de d correspond donc à la plus grande baisse de la population. Ce maximum est obtenu pour $x = 3$, soit $d(3) = \ln 10 - 0,9 \approx 1,402$ soit environ une baisse de 140 habitants.
   b. On peut prévoir une augmentation de la population quand les arrivées vont dépasser les départs, soit quand $d(x) < 0$; on a vu que sur $[3\,;\,20]$, la fonction d est décroissante à partir de $d(\alpha) = 0$; donc sur $[3\,;\,20]$, si $x > \alpha$, alors $d(x) < 0$.
   On peut estimer que la population augmentera à partir de 2013.