Corrigé du baccalauréat ES La Réunion juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. La fonction est décroissante sur l'intervalle donc $f(a) > f(b)$.
2. Deux solutions -3 et une autre entre 2 et 4.
3. Sur l'intervalle $[4; 5]$, la fonction est strictement négative donc l'intégrale est négative.
4. • Sur l'intervalle $[-5 ; 2]$ on a $f(x) \geqslant 1$ et la fonction g croit de $-\dfrac{7}{2}$ à 0, donc l'équation $f(x) = g(x)$ n'a pas de solution ;

   • Sur l'intervalle $[4; 6]$ on a $f(x) \leqslant 0$ et la fonction g croit de 1 à 2, donc l'équation $f(x) = g(x)$ n'a pas de solution ;

   • Sur l'intervalle $[2; 4]$ la fonction f décroit de 4 à -2 et la fonction g croit de 0 à 1 : il existe donc par continuité un réel $\alpha \in [2 ; 4]$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

   Il y a donc une solution unique.

   Rem. On peut aussi considérer la fonction $f - g$ somme de deux fonctions décroissantes sur $[2; 4]$ qui décroit de 4 à -4 ; comme elle continue, d'après le théorème de la valeur intermédiaire elle s'annule une fois sur l'intervalle.

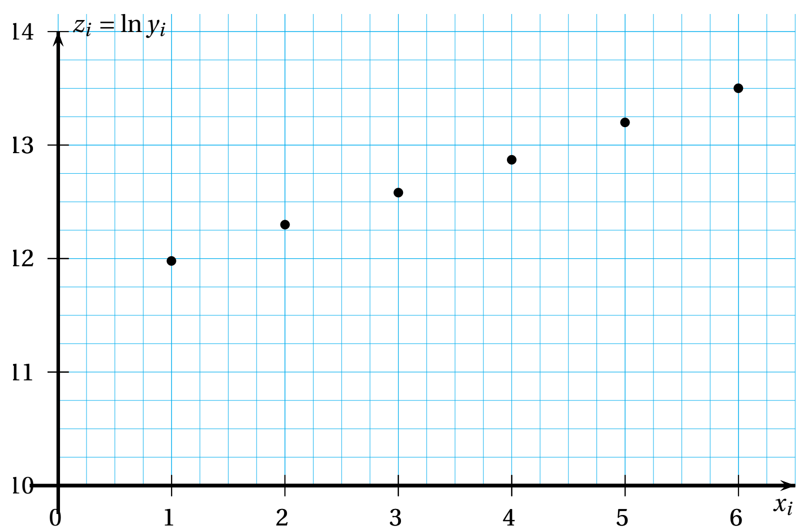
EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. **a.**

x_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$	11,98	12,30	12,58	12,87	13,2	13,5

b.



c. La calculatrice donne après arrondis au centième des coefficients : $z = 0,3x + 11,68$.

d. On a donc $z = \ln y = 0,3x + 11,68 \iff y\mathrm{e}^{0,3x+11,68} = \mathrm{e}^{0,3x} \times \mathrm{e}^{11,68}$.

Or $\mathrm{e}^{11,68} \approx 118\,184,2$, d'où en arrondissant : $y \approx 118\,184\mathrm{e}^{0,3x}$.

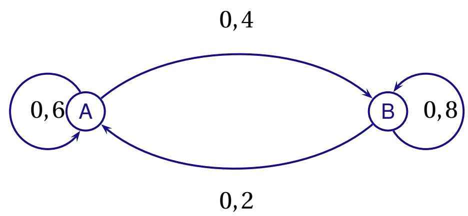
2. **a.** $C(x) \geqslant 2000000 \iff 120000\text{e}^{0,3x} \geqslant 2000000 \iff \text{e}^{0,3x} \geqslant \dfrac{50}{3} \iff 0,3x \geqslant \ln\left(\frac{50}{3}\right) \iff$
$x \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{50}{3}\right)}{0,3}$.

Les nombres solutions sont les nombres supérieurs ou égal à $\dfrac{\ln\left(\frac{50}{3}\right)}{0,3}$.

b. 2008 correspond au rang $x = 8$, d'où $120000\text{e}^{0,3\times 8} \approx 1322781{,}2$ soit au millier d'euros près 1 323 000 €.
On reprend l'inéquation précédente et on prend le plus petit entier dans l'ensemble des solutions ; comme $\dfrac{\ln\left(\frac{50}{3}\right)}{0,3} \approx 9,4$, il faut choisir $n = 10$.
Le chiffre d'affaires devrait dépasser 2 000 000 € à partir de 2010.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1.



On en déduit en restant l'ordre alphabétique des sommets la matrice de transition :
$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

2. **a.** On a $P_1 = P_0 \times M = (0,1 \quad 0,9) \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,24 \quad 0,76)$.

De même $P_2 = P_1 \times M = (0,24 \quad 0,76) \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,296 & 0,704 \end{pmatrix}$.

b. La probabilité qu'il joue est d'après la question précédente 0,296 soit 0,30 au centième près.

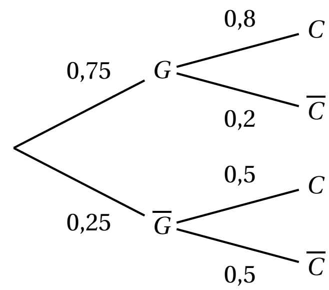
3. **a.** On a pour tout entier n, $v_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{1}{3} = 0,4a_n + 0,2 - \dfrac{1}{3} = 0,4a_n + \dfrac{0,6-1}{3} = 0,4a_n - 0,4\dfrac{1}{3} = 0,4\left(a_n - \dfrac{1}{3}\right) = 0,4v_n$.
L'égalité $v_{n+1} = 0,4v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,4 et de premier terme $v_0 = u_0 - \dfrac{1}{3} = 0,1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{-0,7}{3} = \dfrac{-7}{30}$.

b. On sait que pour tout entier n, $v_n = v_0 \times 0,4^n = \dfrac{-7}{30} \times 0,4^n$ et comme $v_n = a_n - \dfrac{1}{3} \iff$
$a_n = v_n + \dfrac{1}{3} = \dfrac{-7}{30} \times 0,4^n + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\left(1 - 0,7 \times 0,4^n\right)$.

c. Comme $0 < 0,4 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,4^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$.
La matrice de transition ne contenant pas de terme nul, l'état $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ (avec $a + b = 1$) indépendant de l'état initial.
On a donc $a = \dfrac{1}{3}$ et par conséquent $b = \dfrac{2}{3}$. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1.



2. **a.** $P(G\cap C) = p(G)\times p_G(C) = 0,75\times 0,8 = 0,6$.

b. Pour cet évènement entre le guitariste et la chanteuse un seul des deux se trompe. La probabilité est donc égale à :
$p(G\cap\overline{G}) + p\left(\overline{G}\cap C\right) = 0,75\times 0,2 + 0,25\times 0,5 = 0,15 + 0,125 = 0,275$.

c. D'après la loi des probabilités totales, on a :
$p(C) = p(C\cap G) + p(C\cap\overline{G}) = 0,75\times 0,8 + 0,25\times 0,5 = 0,6 + 0,125 = 0,725$.

3. $p_C(G) = \dfrac{p(G\cap C)}{p(G)} = \dfrac{0,6}{0,725} \approx 0,828$ au millième près.

4. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0,6$.
La probabilité qu'ils se trompent aux trois concours est $1 - 0,6)^3 = 0,4^3$.
Donc la probabilité qu'ils jouent parfaitement à au moins l'un des trois concours est égale à :
$1 - 0,4^3 = 1 - 0,064 = 0,936$.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. La fonction est dérivable sur l'intervalle de définition et on a :
$f'(x) = -8,9\times\dfrac{1}{x+0,3} = -\dfrac{8,9}{x+0,3} < 0$; donc la fonction f est décroissante sur $[0\,;\,1\,000]$.

2. $f(x) \leqslant 45 \iff 89,5 - 8,9\ln(x+0,3) \leqslant 45 \iff$
$44,5 \leqslant 8,9\ln(x+0,3) \iff \dfrac{44,5}{8,9} \leqslant \ln(x+0,3) \iff \ln(x+0,3) \geqslant 5 \iff x+0,3 \geqslant \mathrm{e}^5 \iff$
$x \geqslant \mathrm{e}^5 - 0,3$.

3. **a.** Sur $[0\,;\,1\,000]$ la fonction g est dérivable et sur cet intervalle :
$g'(x) = 98,4 - 8,9\times 1\times\ln(x+0,3) - 8,9(x+0,3)\times\dfrac{1}{x+0,3} = 98,4 - 8,9\ln(x+0,3) - 8,9 =$
$89,5 - 8,9\ln(x+0,3) = f(x)$, donc g est bien une primitive de f sur $[0\,;\,1\,000]$.

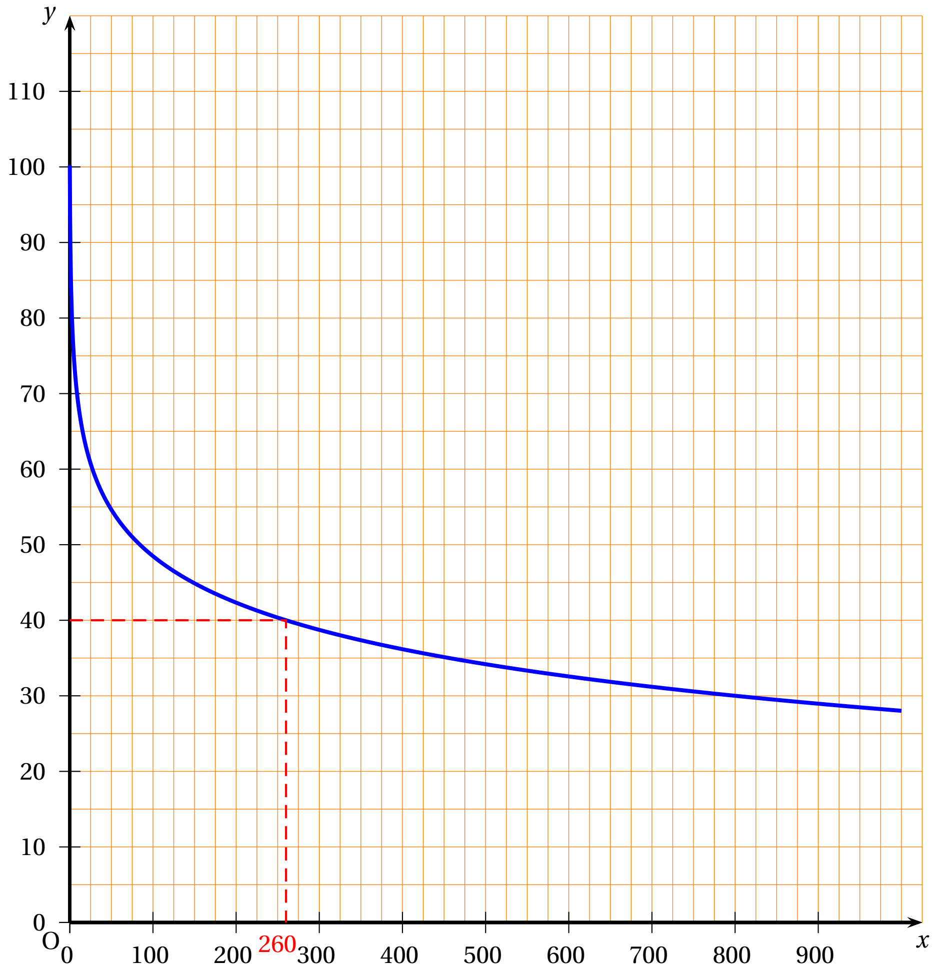
b. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[200\,;\,800]$ est égale à :
$m = \dfrac{1}{800-200}\displaystyle\int_{200}^{800} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{600}[F(x)]_{200}^{800} = \dfrac{1}{600}(F(800) - F(200)) =$
$98,4\times 800 - 8,9(800+0,3)\ln(800+0,3) - [98,4\times 200 - 8,9(200+0,3)\ln(200+0,3)] =$
$78\,720 - 19\,680 - 7\,122,67\ln(800,3) + 1\,782,67\ln 200,3 =$
$59\,040 - 7\,122,67\ln(800,3) + 1\,782,67\ln 200,3 \approx 34,8$ soit à l'unité près 35.

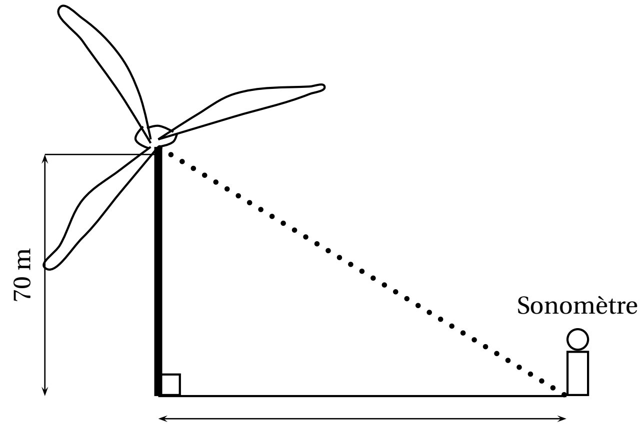
Partie B

1. La droite d'équation $y = 40$ coupe la courbe en un point d'abscisse à peu près égale à 260 (m). Il faut donc être à plus de 260 m de l'éolienne.
2. La distance centre de l'éolienne-sonomètre est égale à $\sqrt{x^2 + 70^2} = \sqrt{x^2 + 4900}$.
   Il faut donc résoudre l'équation :
   $f\left(\sqrt{x^2+4900}\right) = 45 \iff 89,5 - 8,9\ln\left(\sqrt{x^2+4900}+0,3\right) = 45 \iff 8,9\ln\left(\sqrt{x^2+4900}+0,3\right) = 44,5 \iff \ln\left(\sqrt{x^2+4900}+0,3\right) = \dfrac{44,5}{8,9} \iff \ln\left(\sqrt{x^2+4900}+0,3\right) = 5 \iff \sqrt{x^2+4900}+0,3 = \mathrm{e}^5 \iff \sqrt{x^2+4900} = \mathrm{e}^5 - 0,3 \Rightarrow x^2 + 4900 = \left(\mathrm{e}^5 - 0,3\right)^2 \iff x^2 = \left(\mathrm{e}^5-0,3\right)^2 - 4900 \Rightarrow x = \sqrt{\left(\mathrm{e}^5-0,3\right)^2 - 4900} \approx 130,528$ soit environ 181 (m).
   Rem. On avait vu dans la partie A question **2.** que $f(x) = 45$ pour $x = \mathrm{e}^5 - 0,3$.
   Il faut donc trouver le côté du triangle de mesure d (du sonomètre au pied de l'éolienne) tel que $d^2 + 70^2 = \left(\mathrm{e}^5 - 0,3\right)^2$. On aboutit au même calcul.

Annexe 1 - Exercice 4

Courbe représentative de *f*




70 m
Sonomètre