Corrigé du baccalauréat ES – Polynésie 9 septembre 2015

Exercice 1 **Commun à tous les candidats** **5 points**

Partie A

À une roue de loterie dans une fête foraine, la probabilité annoncée de gagner une partie est égale à $0,12$. Un joueur a la possibilité de jouer plusieurs parties.

1. Un joueur achète un carnet de tickets permettant de faire quatre parties. La valeur la plus approchée de la probabilité que le joueur gagne une seule fois sur les quatre parties est :

   $\boxed{\textbf{a. } 0,3271}$ **b.** 0,0002 **c.** 0,4824 **d.** 0,1215

   La variable aléatoire X qui donne le nombre de parties gagnées suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,12$. On cherche $P(X = 1)$.

2. Après avoir gagné une partie, le joueur a la possibilité d'emporter son lot ou de le remettre en jeu. La probabilité qu'un joueur emporte son lot sachant qu'il a gagné est 0,8. La valeur la plus approchée de la probabilité qu'il parte avec son lot après une seule partie est :

   a. 0,024 **b.** 0,12 $\boxed{\textbf{c. } 0,096}$ **d.** 0,8

   En construisant un arbre pondéré, on suit le chemin : $0,12 \times 0,8 = 0,096$

3. On modélise le nombre de parties jouées par jour à cette loterie par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 150$ et d'écart-type $\sigma = 10$.
   Une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(140 < X < 160)$ est :

   a. 0,954 $\boxed{\textbf{b. } 0,683}$ **c.** 0,997 **d.** 0,841

   On connaît $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,68$.

Partie B

4. La fonction f', dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\text{e}^{-x}$, a pour expression :

   a. $(-x-1)\text{e}^{-x}$ **b.** $(-2x-3)\text{e}^{-x}$ **c.** $(2x+3)\text{e}^{-x}$ $\boxed{\textbf{d. } (-2x+1)\,\text{e}^{-x}}$

   On applique la formule de dérivation d'un produit de fonctions.

5. Soit un nombre réel strictement positif a.
   Parmi ces suites d'inégalités quelle est l'inégalité correcte ?

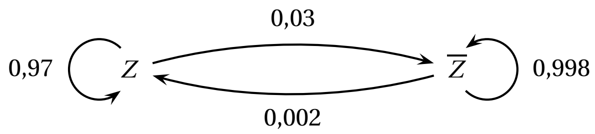
   a. $a < \ln a < \text{e}^a$ **b.** $\text{e}^a < a < \ln a$ **c.** $\ln a < \text{e}^a < a$ $\boxed{\textbf{d. } \ln a < a < \text{e}^a}$

   Il suffit de tracer les trois courbes d'équations $y = \ln x$, $y = x$ et $y = \text{e}^x$ pour s'en convaincre.

Exercice 2 Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

1. On représente la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets Z et $\overline{Z}$:



2. **a.** D'après le texte, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,97\,a_n + 0,002\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0,03\,a_n + 0,998\,b_n \end{array}\right.$

 Autrement dit : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,002 & 0,998\end{pmatrix}$

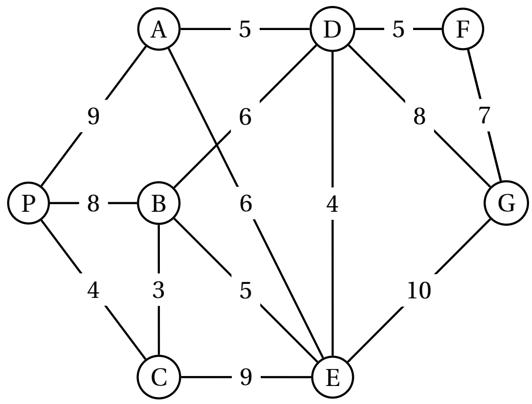
 La matrice de transition de l'état n à l'état $n+1$ est donc $M = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,002 & 0,998\end{pmatrix}$

 b. $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,002 & 0,998\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4\times 0,97 + 0,6\times 0,002 & 0,4\times 0,03 + 0,6\times 0,998\end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 0,388 + 0,0012 & 0,012 + 5988\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3892 & 0,6108\end{pmatrix}$

3. Pour que l'objectif de la municipalité soit atteint, il faudrait que le pourcentage d'automobiles en ZTL soit ramené à la moitié de 40 % en deux ans, c'est-à-dire à 20 % en 24 mois.
 D'après le cours, on sait que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P_n = P_0 \times M^n$.
 À la calculatrice on obtient $P_{24} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,002 & 0,998\end{pmatrix}^{24} \approx \begin{pmatrix} 0,2171 & 0,7829\end{pmatrix}$
 Donc $a_{24} \approx 0,2171 > 0,20$ donc l'objectif affiché par la municipalité ne sera pas atteint.

Partie B

Un réseau de navettes gratuites est mis en place entre des parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville.
Le graphe ci-contre indique les voies et les temps des liaisons, en minutes, entre ces différents sites.



1. Sur ce graphe, c'est assez facile de trouver un itinéraire reliant le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites :

 P – B – C – E – A – D – F – G

 Note du correcteur

 Rechercher dans un graphe un trajet qui passe une et une seule fois par tous les sommets, c'est chercher un chemin hamiltonien ; cette notion n'est pas au programme de la spécialité en ES mais dans le graphe proposé ici, il n'y avait guère de difficulté pour répondre à la question.

 Il n'existe pas – à ma connaissance – de condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe admette un chemin hamiltonien.

2. On cherche un chemin qui emprunte une et une seule fois toutes les voies et qui relie P à G, autrement dit un chemin eulérien.

Or, d'après le théorème d'Euler, il existe un chemin eulérien dans un graphe si et seulement si tous les sommets ou tous les sommets sauf 2 sont de degrés pairs. Tous les sommets de ce graphe sont de degrés impairs sauf F, donc il n'existe aucun itinéraire qui emprunte une et une seule fois toutes les voies.

3. On va déterminer un trajet de durée minimale pour se rendre du parking P à la gare G au moyen de l'algorithme de Dijkstra :

P	A	B	C	D	E	F	G	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	P
	9 P	8 P	4 C	∞	∞	∞	∞	C
	9 P	~~8 P~~ 7 C		∞	13 C	∞	∞	B
	9 P			13 B	13 C	∞	∞	A
				13 B ~~14 A~~	13 C ~~15 A~~	∞	∞	D
					13 C	18 D	21 D	E
						18 D	21 D ~~23 E~~	F
							21 D ~~25 F~~	G

Le chemin le plus rapide de P vers G est d'une durée de 21 minutes :

$$P \xrightarrow{4} C \xrightarrow{3} B \xrightarrow{6} D \xrightarrow{8} G$$

Exercice 3 Commun à tous les candidats 5 points

Étude de la répartition des salaires dans deux entreprises

1. La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point E d'abscisse 0,6; graphiquement on voit que son ordonnée est approximativement de 0,3.
   $u(0,6) = 0,6\times 0,6^2 + 0,4\times 0,6 = 0,456$ et $v(0,6) = 0,7\times 0,6^3 + 0,1\times 0,6^2 + 0,2\times 0,6 = 0,3072$
   Donc la courbe $\mathscr{C}$ est la représentation de la fonction v, et donc la courbe représentative de la fonction u est $\mathscr{C}'$.
   On a alors :

Filiale	A	B
Fonction	u	v
Courbe	$\mathscr{C}'$	$\mathscr{C}$

2. **a.** Pour avoir le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires, on calcule $u(0,5)$ que l'on exprimera en pourcentage.
   $u(0,5) = 0,6\times 0,5^2 + 0,4\times 0,5 = 0,35$ donc 50 % des salariés ayant les plus bas salaires dans la filiale A se partagent 35 % de la masse salariale.

   b. $v(0,5) = 0,7\times 0,5^3 + 0,1\times 0,5^2 + 0,2\times 0,5 = 0,2125$; donc 50 % des salariés ayant les plus bas salaires dans la filiale B se partagent 21,25 % de la masse salariale.
   Donc pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, c'est la filiale A qui distribue la plus grande part de la masse salariale.

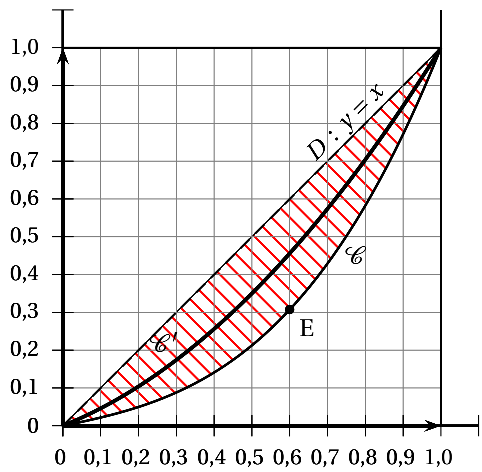
   c. D'après la question précédente, c'est la filière B qui semble avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire.

3. Pour mesurer ces inégalités de salaires, on définit le coefficient de Gini associé à une fonction f modélisant la répartition des salaires, rangés en ordre croissant, par la formule :

$$c_f = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

   a. $c_u = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x\right)$
   Une primitive U de la fonction u sur $[0;\ 1]$ est définie par :
   $U(x) = 0,6\frac{x^3}{3} + 0,4\frac{x^2}{2} = 0,2x^3 + 0,2x^2$; $\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x = U(1) - U(0) = 0,4$
   Donc $c_u = 2(0,5 - 0,4) = 0,2$

   b. $c_v = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x\right)$ donc
   $\frac{c_v}{2} = \frac{1}{2} - \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x$
   De plus, $\frac{1}{2}$ est la moitié de l'aire du carré de côté 1, donc c'est l'aire du domaine compris entre la droite d'équation $y = x$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$; autrement dit $\frac{1}{2} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$.
   $\int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

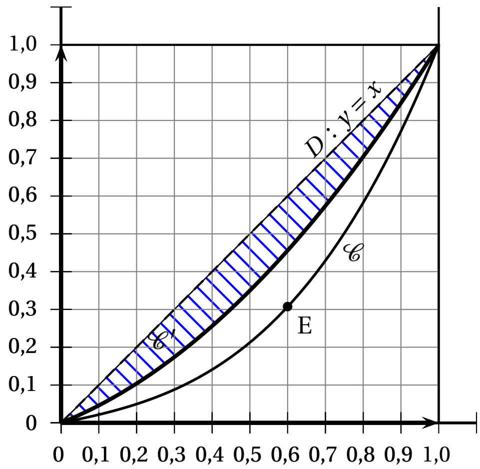


   Donc $\frac{c_v}{2}$ représente l'aire du domaine hachuré sur le graphique ci-dessus.

   c. L'aire du domaine hachuré est plus petite que 0,5 donc $c_v \leqslant 1$.
   De plus, c_v représente une aire donc est positive : $0 \leqslant c_v \leqslant 1$

   d.

De la même manière, on prouverait que $\dfrac{c_u}{2}$ est égal à l'aire du domaine hachuré dans le graphique ci-contre.



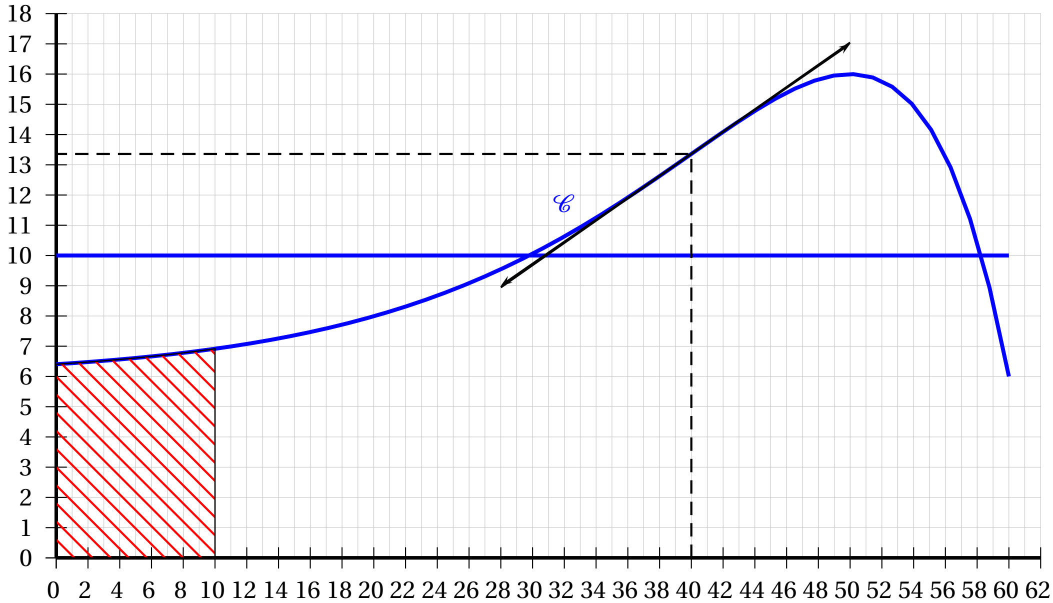
En comparant les aires, on en déduit que

$$\frac{c_u}{2} \leqslant \frac{c_v}{2}$$

et donc que $c_u \leqslant c_v$

Exercice 4 Commun à tous les candidats 5 points

On considère une fonction P définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,60]$.
On donne, ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction P.



Partie A

1. Autour de $x = 54$, la fonction P est décroissante donc le nombre dérivé $P'(54)$ est négatif.
2. D'après le graphique, la courbe $\mathscr{C}$ traverse sa tangente au point d'abscisse 40. Ce point est donc un point d'inflexion. La fonction P est convexe sur l'intervalle $[0\,;\,40]$.
3. Pour déterminer graphiquement les solutions de l'équation $P(x) = 10$, on trace la droite d'équation $y = 10$.
   Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de cette droite et de la courbe $\mathscr{C}$.
   Les solutions de l'équation $P(x) = 10$ sont, à l'unité près, 30 et 58.
4. On note A le nombre $\displaystyle\int_0^{10} P(x)\,\mathrm{d}x$; il correspond à l'aire du domaine hachuré sur le graphique.
   Donc $60 < A < 70$

Partie B

La fonction P est définie sur l'intervalle $[0\,;\,60]$ par : $P(x) = 6 + (60 - x)\,\mathrm{e}^{0,1x-5}$

1. **a.** D'après les résultats donnés par le logiciel de calcul formel, $P'(x) = (-0,1x + 5)\,\mathrm{e}^{0,1x-5}$
   Pour tout x, $\mathrm{e}^{0,1x-5} > 0$ donc $P'(x)$ est du signe de $-0,1x + 5$ c'est-à-dire :
   - strictement positif si $-0,1x + 5 > 0$ soit sur $[0\,;\,50[$;
   - strictement négatif si $-0,1x + 5 < 0$ soit sur $]50\,;\,60]$.

   b. D'après la question précédente, on peut dire que :
   - la fonction P est strictement croissante sur $[0\,;\,50]$;
   - la fonction P est strictement décroissante sur $[50\,;\,60]$;
   - la fonction P admet un maximum en $x = 50$ qui vaut $P(50) = 16$.
2. $P(0) \approx 6,4 < 10$ et $P(60) = 6$
   On peut établir le tableau de variations de la fonction P sur $[0\,;\,60]$:

x	0	x_0	50	60
$P(x)$			16	
		10		
	$\approx 6,4$			6

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $P(x) = 10$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;50]$.

$\left.\begin{array}{rcr} P(29) & \approx & 9,8 \\ P(30) & \approx & 10,1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_0 \in [29\,;30]$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{rcr} P(29,7) & \approx & 9,98 \\ P(29,8) & \approx & 10,01 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_0 \in [29,7\,;29,8]$

Donc 29,7 est une valeur approchée de x_0 à 0,1 près.

3. La fonction P est convexe sur les intervalles sur lesquels sa courbe représentative est située au-dessus de ses tangentes, ce qui correspond aux intervalles sur lesquels la fonction dérivée est croissante, ce qui correspond aux intervalles sur lesquels la fonction dérivée seconde est positive.

D'après les résultats donnés par le logiciel de calcul formel, $P''(x) = (-0,01x + 0,4)\,\mathrm{e}^{0,1x-5}$.

$P''(x) > 0 \iff -0,01x + 0,4 > 0 \iff 0,4 > 0,01x \iff 40 > x$

Donc la fonction P est convexe sur $[0\,;40[$ et concave sur $]40\,;60]$.