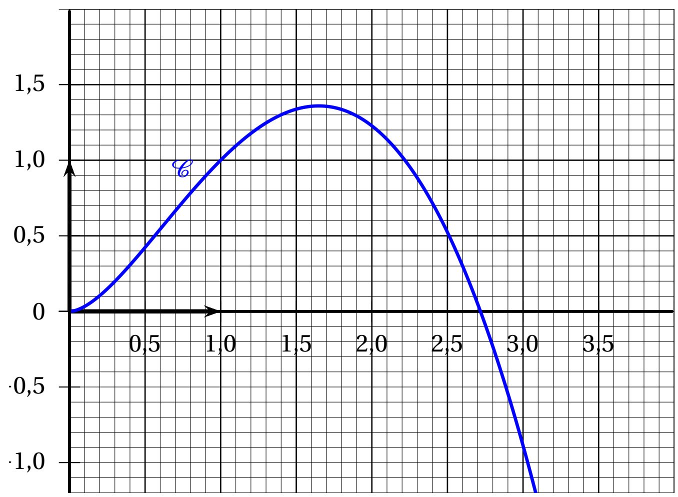
Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat Terminale ES Polynésie 22 juin 2018

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,3]$ par $f(x) = x^2(1 - \ln x)$.
On donne ci-dessous sa courbe représentative $\mathscr{C}$.



On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,3]$, on note f' sa fonction dérivée et on admet que sa dérivée seconde f'' est définie sur $]0\,;\,3]$ par : $f''(x) = -1 - 2\ln x$.

1. Sur $]0\,;\,3]$, $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse :

a. $\boxed{\text{e}}$ **b.** 2,72 **c.** $\dfrac{1}{2}\text{e} + 1$

$f(x) = 0 \iff x^2(1 - \ln x) = 0 \iff 1 = \ln x \iff x = \text{e}$

2. $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse :

a. e **b.** $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{\text{e}}}}$ **c.** $\sqrt{\text{e}}$

La courbe admet un point d'inflexion pour la valeur de x en laquelle la dérivée seconde f'' s'annule et change de signe.
$f''(x) = -1 - 2\ln x$ donc $f''(x) \geqslant 0 \iff -1 - 2\ln x \geqslant 0 \iff -1 \geqslant 2\ln x \iff -\dfrac{1}{2} \geqslant \ln x \iff \text{e}^{-\frac{1}{2}} \geqslant x \iff x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\text{e}}}$

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,3]$ on a :

a. $\boxed{f'(x) = x(1 - 2\ln x)}$ **b.** $f'(x) = -\dfrac{2}{x}$ **c.** $f'(x) = -2$

$f'(x) = 2x \times (1 - \ln x) + x^2\left(0 - \dfrac{1}{x}\right) = 2x - 2x\ln x - x = x - 2x\ln x = x(1 - 2\ln x)$

4. Sur l'intervalle $[1\,;3]$:

a. f est convexe **b.** f est décroissante **c.** $\boxed{f' \text{ est décroissante}}$

> D'après le graphique, la fonction f n'est ni convexe ni décroissante sur $[1\ ;\ 3]$.
> On peut le vérifier en disant que $f''(x) < 0$ sur $[1\ ;\ 3]$ car $1 > \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ (question **2.**)

5. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e s'écrit :

a. $y = -x + \mathrm{e}$ **b.** $y = -\mathrm{e}x$ **c.** $\boxed{y = -\mathrm{e}\,x + \mathrm{e}^2}$

> L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e est :
> $y = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$ c'est-à-dire $y = (\mathrm{e}(1 - 2\ln \mathrm{e}))(x - \mathrm{e}) + \mathrm{e}^2(1 - \ln \mathrm{e})$
> soit $y = -\mathrm{e}\,x + \mathrm{e}^2$.

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Une entreprise est composée de 3 services A, B et C d'effectifs respectifs 450, 230 et 320 employés.
Une enquête effectuée sur le temps de parcours quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que :

40 % des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;

20 % des employés du service B résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;

80 % des employés du service C résident à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les évènements suivants :

A : « l'employé fait partie du service A » ;

B : « l'employé fait partie du service B » ;

C : « l'employé fait partie du service C » ;

T : « l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise ».

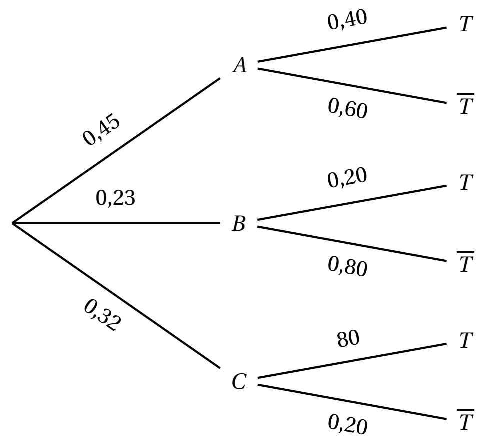
1. a. Le nombre d'employés du service A est 450. Le nombre total d'employés est $450 + 230 + 320 = 1\,000$. La probabilité de choisir au hasard un employé du service A est donc $P(A) = \dfrac{450}{1\,000} = 0{,}45$.

b. On sait que 40 % des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise, donc $P_A(T) = 0{,}40$.

c. On calcule les différentes probabilités à placer dans l'arbre.

- Comme pour le calcul de $P(A)$, on a $P(B) = \dfrac{230}{1\,000} = 0{,}23$ et $P(C) = \dfrac{320}{1\,000} = 0{,}32$.
- On sait que $P_A(T) = 0{,}40$ donc $P_A(\overline{T}) = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$.
- On sait que 20 % des employés du service B résident à moins de 30 minutes de l'entreprise donc $P_B(T) = 0{,}20$ et donc $P_B(\overline{T}) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$.
- On sait que 80 % des employés du service C résident à moins de 30 minutes de l'entreprise donc $P_C(T) = 0{,}80$ et donc $P_C(\overline{T}) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$.

On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. « L'employé choisi est du service A et il réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail » est l'événement $A \cap T$:
   $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,45 \times 0,40 = 0,18$.
3. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T) = P(A) \times P_A(T) + P(B) \times P_B(T) + P(C) \times P_C(T)$
   $\quad = 0,18 + 0,23 \times 0,20 + 0,32 \times 0,80 = 0,482$.
4. Sachant qu'un employé de l'entreprise réside à plus de 30 minutes de son lieu de travail (événement $\overline{T}$), la probabilité qu'il fasse partie du service C est :
   $P_{\overline{T}}(C) = \dfrac{P(C \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{P(C) \times P_C(\overline{T})}{1 - P(T)} = \dfrac{0,32 \times 0,20}{1 - 0,482} \approx 0,124$.
5. On choisit successivement de manière indépendante 5 employés de l'entreprise. On considère que le nombre d'employés est suffisamment grand pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise.
   La variable aléatoire N qui donne le nombre d'employés qui résident à moins de 30 minutes de leur lieu de travail suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = P(T) = 0,482$.
   $P(N = 2) = \dbinom{5}{2} 0,482^2\,(1 - 0,482)^{5-2} \approx 0,323$.

Partie B

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque employé en France, associe son temps de trajet quotidien, en minutes, entre son domicile et l'entreprise. Une enquête montre que X suit une loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart type $\sigma = 10$.

On utilisera les propriétés de la courbe représentative de la fonction densité de la loi normale, notamment la symétrie autour de la droite d'équation $x = \mu$, et les connaissances du cours, pour répondre aux deux premières questions suivantes. On pourrait également utiliser la calculatrice.

1. La probabilité que le trajet dure entre 20 minutes et 40 minutes est
   $P(20 \leqslant X \leqslant 40) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu) = \dfrac{P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)}{2} \approx \dfrac{0,954}{2} \approx 0,477$.
2. $P(X > 50) = P(X > \mu + \sigma) = P(X < \mu - \sigma) = \dfrac{1 - P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)}{2} \approx \dfrac{1 - 0,683}{2} \approx 0,159$.
3. À la calculatrice, on trouve 32 pour valeur approchée du nombre a tel que $P(X > a) = 0,2$.
   On peut donc dire qu'il y a environ 20 % des employés qui ont une durée de trajet supérieure à 32 minutes pour se rendre à leur travail.

Partie C

Cette entreprise souhaite faire une offre de transport auprès de ses employés. Un sondage auprès de quelques employés est effectué afin d'estimer la proportion d'employés dans l'entreprise intéressés par cette offre de transport. On souhaite ainsi obtenir un intervalle de confiance d'amplitude strictement inférieure à 0,15 avec un niveau de confiance de 0,95.

On prend pour intervalle de confiance de la proportion, l'intervalle $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où f est la fréquence dans un échantillon de taille n. L'amplitude de cet intervalle est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Il faut donc chercher n pour que $\dfrac{2}{\sqrt{n}}<0{,}15$; on résout cette inéquation :

$\dfrac{2}{\sqrt{n}}<0{,}15 \iff 2<0{,}15\sqrt{n} \iff \dfrac{2}{0{,}15}<\sqrt{n} \iff \left(\dfrac{2}{0{,}15}\right)^2<n$

Or $\left(\dfrac{2}{0{,}15}\right)^2\approx 177{,}8$; il faut donc consulter au moins 178 employés.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

En économie le résultat net désigne la différence entre la recette et les charges d'une entreprise sur une période donnée. Lorsqu'il est strictement positif, c'est un bénéfice. Propriétaire d'une société, Pierre veut estimer son résultat net à la fin de chaque mois. À la fin du mois de janvier 2018, celui-ci était de 10 000 euros.

Pierre modélise ce résultat net par une suite (u_n) de premier terme $u_0=10000$ et de terme général u_n tel que $u_{n+1}=1{,}02u_n-500$ où n désigne le nombre de mois écoulés depuis janvier 2018.

1. $n=0$ correspond à janvier 2018, donc mars 2018 correspond à $n=2$.
   $u_1=1{,}02u_0-500=1{,}02\times 10000-500=9700$; $u_2=1{,}02u_1-500=1{,}02\times 9700-500=9394$
   Le montant du résultat net réalisé à la fin du mois de mars 2018 est donc de 9 394 euros.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n=u_n-25000$ donc $u_n=a_n+25000$.
   a. • $a_{n+1}=u_{n+1}-25000=1{,}02u_n-500-25000=1{,}02\,(a_n+25000)-25500$
   $=1{,}02a_n+25500-25500=1{,}02a_n$
   • $a_0=u_0-25000=10000-25000=-15000$
   Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $q=1{,}02$ et de premier terme $a_0=-15000$.
   b. On en déduit que, pour tout n, $a_n=a_0\times q^n=-15000\times 1{,}02^n$, puis comme $u_n=a_n+25000$, on déduit que pour tout n, $u_n=25000-15000\times 1{,}02^n$.
   c. On résout l'inéquation $25000-15000\times 1{,}02^n>0$:

$$\begin{aligned}25000-15000\times 1{,}02^n>0 &\iff 25000>15000\times 1{,}02^n &&\iff \frac{25000}{15000}>1{,}02^n\\ &\iff \frac{5}{3}>1{,}02^n &&\iff \ln\left(\frac{5}{3}\right)>\ln\left(1{,}02^n\right)\\ &\iff \ln\left(\frac{5}{3}\right)>n\times\ln(1{,}02) &&\iff \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1{,}02)}>n\end{aligned}$$

   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1{,}02}\approx 25{,}8$ donc $u_n>0$ pour $n\leqslant 25$. Pierre aura donc un résultat net positif pendant 25 mois, c'est-à-dire jusqu'à fin février 2020.

3. À l'aide d'un algorithme, Pierre souhaite déterminer le cumul total des résultats nets mensuels de la société jusqu'au dernier mois où l'entreprise est bénéficiaire.

   On complète l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le nombre de mois pendant lesquels l'entreprise est bénéficiaire et la variable S le cumul total des résultats nets mensuels sur cette période :

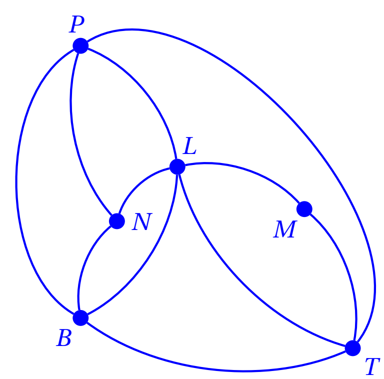
```
U ← 10000
S ← 0
N ← 0
Tant que N ⩽ 25
        S ← S + U
        U ← 1,02 × U − 500
        N ← N + 1
Fin Tant que
```

Exercice 3 **4 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un journaliste britannique d'une revue consacrée à l'automobile doit tester les autoroutes françaises. Pour remplir sa mission, il décide de louer une voiture et de circuler entre six grandes villes françaises : Bordeaux (B), Lyon (L), Marseille (M), Nantes (N), Paris (P) et Toulouse (T).

Le réseau autoroutier reliant ces six villes est modélisé par le graphe ci-contre sur lequel les sommets représentent les villes et les arêtes les liaisons autoroutières entre ces villes.



Partie A

1. **a.** Le graphe proposé a 6 sommets donc il est d'ordre 6.

   b. Il n'y a pas d'arête reliant les sommets P et M donc le graphe n'est pas complet.

2. **a.** On admet que le graphe est connexe. Le journaliste envisage de parcourir chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule.

   Le tableau suivant donne les degrés des sommets :

Sommet	B	L	M	N	P	T
Degré	4	5	2	3	4	4

   Il y a exactement deux sommets L et N de degrés impairs, donc d'après le théorème d'Euler, on peut parcourir le graphe en passant une et une seule fois par chacune des liaisons modélisées, à condition de partir de L et d'arriver à N, ou de partir de N et d'arriver à L.

   b. D'après le théorème d'Euler, le journaliste ne va pas pouvoir louer sa voiture dans un aéroport parisien, parcourir chacune des liaisons une et une seule fois puis rendre la voiture dans le même aéroport puisqu'il y a deux sommets de degrés impairs (ce graphe n'est pas un cycle eulérien).

3. On nomme G la matrice d'adjacence du graphe (les villes étant rangées dans l'ordre alphabétique). On donne :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } G^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

a. On complète la matrice d'adjacence en précisant les sommets :

$$G = \begin{array}{c} \\ B \\ L \\ M \\ N \\ P \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B & L & M & N & P & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On met 1 s'il existe une arête entre les deux sommets (comme entre B et L), on met 0 sinon (comme entre M et P). Comme il n'y a pas de boucle autour du M, on met 0 à l'intersection de la 3$^{\text{e}}$ ligne et de la 3$^{\text{e}}$ colonne.

b. Alors qu'il se trouve à Paris, le rédacteur en chef demande au journaliste d'être à Marseille exactement trois jours plus tard pour assister à une course automobile. Le journaliste décide chaque jour de s'arrêter dans une ville différente.

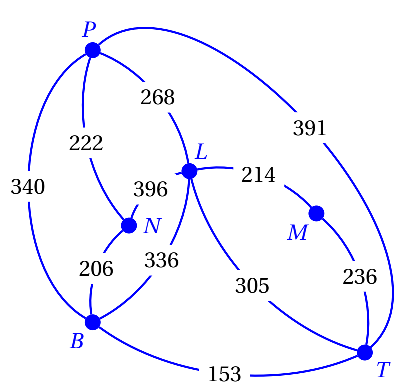
On cherche donc des trajets de longueur 3 qui sont donnés par la matrice G^3.

On regarde la matrice G^3 en rajoutant les sommets : $\begin{array}{c} \\ B \\ L \\ M \\ N \\ P \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B & L & M & N & P & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$

À l'intersection de la ligne 5 (sommet P) et de la colonne 3 (sommet M) il y a le nombre 5 donc il y a 5 trajets de longueur 3 pour aller de P à M.

Partie B

On a indiqué sur le graphe ci-dessous le temps nécessaire en minutes pour parcourir chacune des liaisons autoroutières.



Le journaliste se trouve à Nantes et désire se rendre le plus rapidement possible à Marseille.
On utilise l'algorithme de Dijkstra pour déterminer le trajet le plus rapide entre Nantes et Marseille.

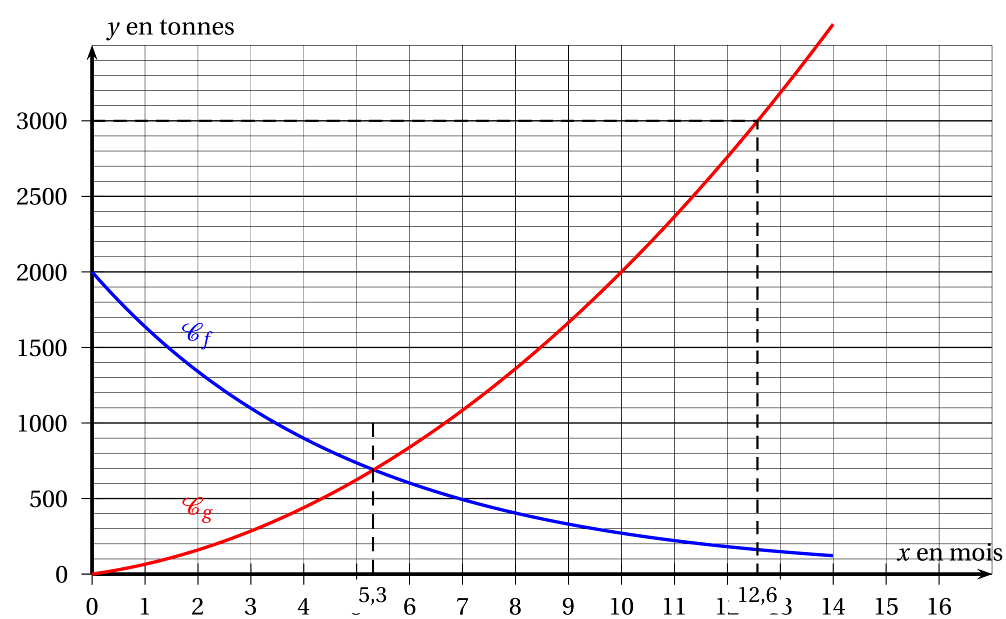
B	L	M	N	P	T	On garde
∞	∞	∞	0	∞	∞	N
~~∞~~ 206 N	~~∞~~ 396 N	∞		~~∞~~ 222 N	∞	B (N)
	396 N	∞		222 N ~~542 B~~	~~∞~~ 359 B	P (N)
	396 N ~~490 P~~	∞			359 B ~~613 P~~	T (B)
	396 N ~~664 T~~	~~∞~~ 595 T				L (T)
		595 T ~~610 L~~				M (T)

Le trajet le plus rapide est : $N \xrightarrow{206} B \xrightarrow{153} T \xrightarrow{236} M$; il a une durée de 595 minutes.

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une usine qui fabrique un produit A, décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires. La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par jour par l'usine est modélisée par :
— la fonction f définie sur $[0 ; 14]$ par $f(x) = 2\,000\,\text{e}^{-0,2x}$ pour le produit A ;
— la fonction g définie sur $[0 ; 14]$ par $g(x) = 15x^2 + 50x$ pour le produit B, où x est la durée écoulée depuis le lancement du nouveau produit B exprimée en mois.

Leurs courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont données ci-dessous.



Partie A

1. La durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle du produit A est d'environ 5,3 mois.
2. L'usine ne peut pas fabriquer une quantité journalière de produit B supérieure à 3 000 tonnes.
   Cette quantité journalière sera atteinte au bout de 12,6 mois.

Partie B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,14]$ on pose $h(x) = f(x) + g(x)$.
On admet que la fonction h ainsi définie est dérivable sur $[0\,;\,14]$.

1. **a.** Cette fonction h modélise la quantité totale de produits A et B que fabrique l'usine.
   b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,14]$, $h(x) = f(x) + g(x) = 2\,000\,\text{e}^{-0,2x} + 15x^2 + 50x$.
   Donc $h'(x) = 2\,000 \times (-0,2)\,\text{e}^{-0,2x} + 30x + 50 = -400\,\text{e}^{-0,2x} + 30x + 50$.
2. On admet que le tableau de variation de la fonction h' sur l'intervalle $[0\,;\,14]$ est :

x	0		14
variations de h'	-350	$\nearrow$	$h'(14) \approx 446$

   a. On complète le tableau de variation de h' en rajoutant la valeur 0 :

x	0		α		14
variations de h'	-350	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$h'(14) \approx 446$

   D'après ce tableau, on peut affirmer que l'équation $h'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,14]$.
   En utilisant la calculatrice, on trouve :
   $\left.\begin{array}{l} h'(4) \approx -9,7 < 0 \\ h'(5) \approx 52,8 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [4\,;\,5]$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} h'(4,1) \approx -3,2 < 0 \\ h'(4,2) \approx 3,3 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [4,1\,;\,4,2]$

   b. On peut en déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,14]$:
   - Sur $[0\,;\,\alpha[$, $h'(x) < 0$ donc la fonction h est strictement décroissante sur $[0\,;\,\alpha]$.
   - Sur $]\alpha\,;\,14]$, $h'(x) > 0$ donc la fonction h est strictement croissante sur $[\alpha\,;\,14]$.
   - La fonction h admet un minimum pour $x = \alpha$.
3. Voici un algorithme :

```
Y ← −400 exp(−0,2X) + 30X + 50
Tant que Y ⩽ 0
      X ← X + 0,1
      Y ← −400 exp(−0,2X) + 30X + 50
Fin Tant que
```

   a. Dans cet algorithme, la variable Y désigne $h'(X)$.
   Si la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, après l'exécution de cet algorithme la variable X contient, à 0,1 près, la première valeur telle que $Y > 0$, c'est-à-dire $h'(X) > 0$, soit une valeur approchée de α à 0,1 près.

b. On suppose toujours que la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, et on veut qu'après son exécution la variable X contienne une valeur approchée à 0,001 près de α.
Il suffit donc de changer la ligne $\boxed{X \leftarrow X + 0{,}1}$ par la ligne $\boxed{X \leftarrow X + 0{,}001}$.

4. **a.** Soit H la fonction définie sur $[0\,;\,14]$ par : $H(x) = -10\,000\,\text{e}^{-0{,}2x} + 5x^3 + 25x^2$.
$H'(x) = -10\,000 \times (-0{,}2)\,\text{e}^{-0{,}2x} + 5 \times 3x^2 + 25 \times 2x = 2\,000\,\text{e}^{-0{,}2x} + 15x^2 + 50x = h(x)$ donc la fonction H est une primitive de la fonction h sur $[0\,;\,14]$.

b. $\dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{12} h(x)\,\text{d}x = \dfrac{1}{12}\big(H(12) - H(0)\big) \approx 1\,778$

c. $\dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{12} h(x)\,\text{d}x$ est la valeur moyenne de la fonction h sur les 12 premiers mois, donc la production moyenne de produits A et B sur cette période est de 1 778.