∽ Corrigé du baccalauréat ES ∾
Nouvelle-Calédonie – Wallis et Futuna – 28 novembre 2017

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Affirmation 1.

Pour tout réel a strictement positif, $\ln\left(a^3\right) - \ln\left(a^2\right) = \ln\left(a^{25}\right) - \ln\left(a^{24}\right)$.

Si x et y sont deux réels strictement positifs, alors $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Donc, pour a strictement positif :

$\ln\left(a^3\right) - \ln\left(a^2\right) = \ln\left(\dfrac{a^3}{a^2}\right) = \ln(a)$ et $\ln\left(a^{25}\right) - \ln\left(a^{24}\right) = \ln\left(\dfrac{a^{25}}{a^{24}}\right) = \ln(a)$

Affirmation 1 vraie

Affirmation 2.

Si la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0 ; 100]$, alors $P(X < 75) = P(X > 25)$.

Si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 100]$, alors, pour tous réels a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 100$, on a $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X < b) = \dfrac{b-a}{100-0} = \dfrac{b-a}{100}$.

$P(X < 75) = P(0 \leqslant X < 75) = \dfrac{75-0}{100} = 0,75$ et $P(X > 25) = P(25 < X \leqslant 100) = \dfrac{100-25}{100} = 0,75$.

Affirmation 2 vraie

Affirmation 3.

On a prélevé un échantillon aléatoire de 400 pièces dans une production et observé 6 pièces défectueuses. La borne supérieure de l'intervalle de confiance de la proportion de pièces défectueuses dans la production au niveau de confiance de 95 % est égale à 0,08.

L'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % est généralement $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

$f = \dfrac{6}{400}$ et $n = 400$ donc $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{6}{400} + \dfrac{1}{\sqrt{400}} = 0,065 \neq 0,08$.

Affirmation 3 fausse

Affirmation 4.

L'équation $x\ln(x) = 2\ln(x)$ admet exactement deux solutions : 2 et 1 sur $]0 ; +\infty[$.

On résout l'équation :

$x\ln(x) = 2\ln(x) \iff (x-2)\ln(x) = 0 \iff x-2 = 0$ ou $\ln(x) = 0 \iff x = 2$ ou $x = 1$.

Affirmation 4 vraie

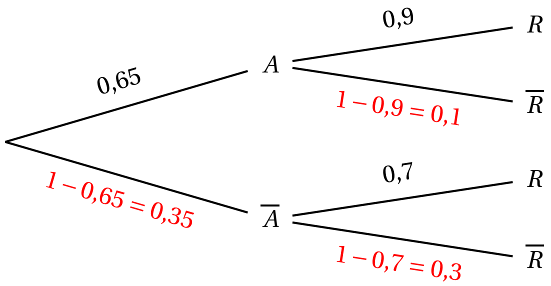
EXERCICE 2 **5 points**
Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Une agence de voyage propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. Le choix du mode de transport peut changer entre l'aller et le retour. À l'aller, le bateau est choisi dans 65 % des cas.
Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10.
Lorsque le train a été choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un client. On considère les évènements suivants :

- A : « le client choisit de faire l'aller en bateau » ;
- R : « le client choisit de faire le retour en bateau ».

1. On traduit cette situation par un arbre pondéré :



2. On choisit au hasard un client de l'agence.

a. L'événement « faire l'aller-retour en bateau » est l'événement $A \cap R$.
D'après l'arbre : $p(A\cap R) = p(A) \times p_A(R) = 0,65 \times 0,9 = 0,585$.

b. Le client utilise les deux moyens de transport dans les événements $A \cap \overline{R}$ (aller en bateau et retour en train) et $\overline{A} \cap R$ (aller en train et retour en bateau).
Ces deux événement sont disjoints donc :
$p\left(A\cap \overline{R} \cup \overline{A} \cap R\right) = p\left(A \cap \overline{R}\right) + p\left(\overline{A} \cap R\right) = 0,65 \times 0,1 + 0,35 \times 0,7 = 0,31$

3. On choisit au hasard 20 clients de cette agence. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui utilisent les deux moyens de transport. On admet que le nombre de clients est assez grand pour que l'on puisse considérer que X suit une loi binomiale.

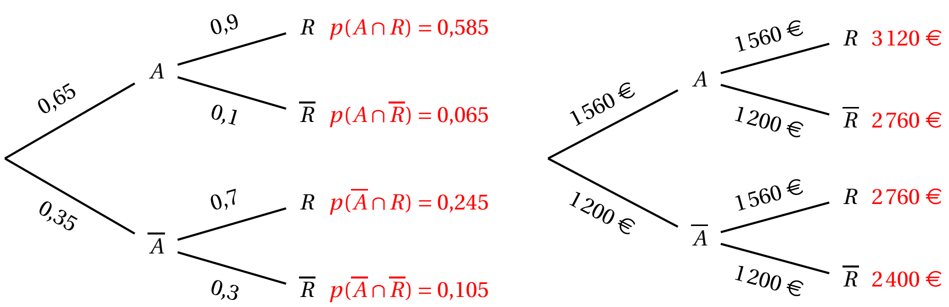
a. Les paramètres de cette loi binomiale sont $n = 20$ et $p = 0,31$.

b. La probabilité qu'exactement 12 clients utilisent les deux moyens de transport différents est :
$p(X = 12) = \binom{20}{12} \times 0,31^{12} \times (1-0,31)^{20-12} \approx 0,005$.

c. La probabilité qu'il y ait au moins 2 clients qui utilisent les deux moyens de transport différents est :
$p(X \geqslant 2) = 1 - \left[p(X=0) + p(X=1)\right] \approx 1 - [0,0006 + 0,0054] = 1 - 0,006 = 0,994$.

4. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 1 560 € en bateau ; il est de 1 200 € en train.
On note Y la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euro de son trajet aller-retour.

a. En mettant en correspondance les deux arbres ci-dessous :



on peut établir la loi de probabilité de Y :

y_i	3 120	2 760	2 400
$p(Y = y_i) = p_i$	0,585	0,31	0,105

b. L'espérance mathématique de Y est
$\sum y_i \times p_i = 3\,120 \times 0{,}585 + 2\,760 \times 0{,}31 + 2\,400 \times 0{,}105 = 2\,932{,}80$.
L'agence de voyage peut annoncer un coût moyen pour le voyage aller-retour de 2 932,80 €.

Exercice 2 — 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

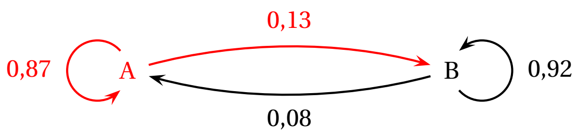
En 2012, un village ne comptait qu'un seul médecin, Albert.
Début 2013, un nouveau médecin, Brigitte, s'installe dans ce village.
À l'arrivée de Brigitte, 90 % des habitants du village choisirent Albert comme médecin, les autres choisirent Brigitte. On suppose que chaque habitant du village est patient du même médecin, Albert ou Brigitte, tout au long d'une année.
On observe, à partir de 2013, que chaque année :

- 13 % des patients d'Albert changent de médecin et deviennent des patients de Brigitte ;
- 8 % des patients de Brigitte deviennent des patients d'Albert.

On choisit au hasard un habitant de ce village. Pour tout entier naturel n,

- a_n est la probabilité que cet habitant soit un patient d'Albert pour l'année $(2013+n)$,
- b_n est la probabilité que cet habitant soit un patient de Brigitte pour l'année $(2013+n)$,
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ est la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $(2013+n)$.

1. L'année 2013 correspond à $n = 0$; en 2013, 90 % des patients allaient chez Albert, donc $a_0 = 0{,}9$. On en déduit que $b_0 = 1 - a_0 = 0{,}1$ et que $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.
2. On représente la situation par un graphe probabiliste en appelant A le sommet correspondant au médecin Albert, et B celui correspondant au médecin Brigitte :



3. D'après le texte $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0{,}87\,a_n + 0{,}08\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0{,}13\,a_n + 0{,}92\,b_n \end{array}\right.$

   ce qui s'écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}87 & 0{,}13 \\ 0{,}08 & 0{,}92 \end{pmatrix}$

   La matrice de transition de ce graphe est donc : $M = \begin{pmatrix} 0{,}87 & 0{,}13 \\ 0{,}08 & 0{,}92 \end{pmatrix}$

4. $P_1 = P_0 M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}87 & 0{,}13 \\ 0{,}08 & 0{,}92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \times 0{,}87 + 0{,}1 \times 0{,}08 & 0{,}9 \times 0{,}13 + 0{,}1 \times 0{,}92 \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 0{,}791 & 0{,}209 \end{pmatrix}$
5. $P_1 = P_0 M$; $P_2 = P_1 M = (P_0 M)\,M = P_0 M^2$; $P_3 = P_2 M = \left(P_0 M^2\right) M = P_0 M^3$; etc.
   On peut donc conjecturer que $P_n = P_0 M^n$.
6. $P_4 = P_0 M^4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}583 & 0{,}417 \end{pmatrix}$
   On peut donc estimer qu'en $2013 + 4 = 2017$, Albert aura 58,3 % des patients et Brigitte 41,7 %
7. L'état stable $S = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de la répartition des patients des médecins Albert et Brigitte est tel que $SM = M$ et $a + b = 1$.

   $SM = M \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}87 & 0{,}13 \\ 0{,}08 & 0{,}92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0{,}87a + 0{,}08b & = & a \\ 0{,}13a + 0{,}92b & = & b \end{array}\right.$

   $\iff \left\{\begin{array}{rcl} -0{,}13a + 0{,}08b & = & 0 \\ 0{,}13a - 0{,}08b & = & 0 \end{array}\right. \iff 13a - 8b = 0$

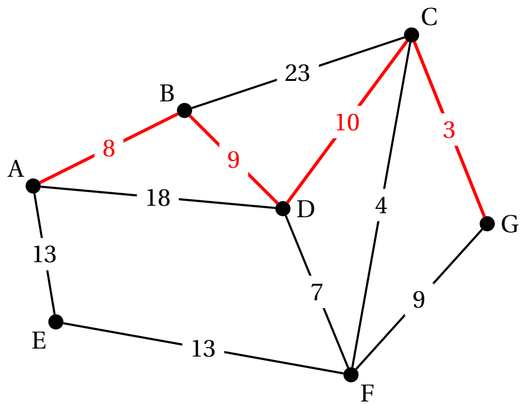
On doit donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 13a - 8b &=& 0\\ a + b &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 13a - 8b &=& 0\\ 8a + 8b &=& 8\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 21a &=& 8\\ b &=& 1-a\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& \dfrac{8}{21}\\ b &=& \dfrac{13}{21}\end{array}\right.$$

L'état stable est $S = \begin{pmatrix}\dfrac{8}{21} & \dfrac{13}{21}\end{pmatrix}$; cela signifie qu'à long terme, la proportion de patients pour Albert sera de $\dfrac{8}{21}$ soit environ 38 %, et donc que la proportion de patients pour Brigitte sera de $\dfrac{13}{21}$ soit environ 62 %.

Partie B

Le médecin Albert, qui officie dans le village A, doit rendre visite à un patient d'un village voisin G. Il a construit le graphe ci-dessous où les sommets représentent les villages alentours. Sur les arêtes sont indiquées les distances en kilomètres.



On détermine le plus court chemin pour aller du village A au village G au moyen de l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	8 A	∞	18 A	13 A	∞	∞	B
		31 B	~~18 A~~ 17 B	13 A	∞	∞	E
		31 B	17 B		26 E	∞	D
		~~31 B~~ 27 D			~~26 E~~ 24 D	∞	F
		27 D				33 F	C
						~~33 F~~ 30 C	G

Le plus court chemin pour aller du village A au village G est donc : A $\xrightarrow{8}$ B $\xrightarrow{9}$ D $\xrightarrow{10}$ C $\xrightarrow{3}$ G ; sa longueur est de 30 km.

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Début 2013, la superficie totale des forêts sur la terre représente un peu plus de 4 milliards d'hectares.

Au cours de l'année 2013, on estime qu'environ 15 millions d'hectares ont été détruits.
Des plantations d'arbres et une expansion naturelle des forêts ont ajouté 10,2 millions d'hectares de nouvelles forêts en 2013.

1. La superficie totale des forêts détruites au cours de l'année 2013 représente une proportion de $\dfrac{15\,000\,000}{4\,000\,000\,000}=0{,}003\,75$; ce qui fait un pourcentage de 0,375 %.

On admet dans la suite que chaque année, la proportion des surfaces détruites de forêts et la superficie de nouvelles forêts restent constantes.
On note u_n la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre au début de l'année $(2013+n)$ avec $u_0=4\,000$.

2. **a.** Si 0,375 % de forêt est détruite chaque année, il en reste 99,625 % ; donc on multiplie la surface de forêt l'année n par 0,99625 pour avoir la surface de forêt l'année $n+1$. Comme de plus on plante chaque année 10,2 millions d'hectares, on aura, pour tout n, $u_{n+1}=0{,}996\,25u_n+10{,}2$.

b. L'année 2014 correspond à $n=1$ donc la superficie de forêt en début de 2014 est :
$u_1=0{,}996\,25u_0+10{,}2=0{,}996\,25\times 4\,000+10{,}2=3\,995{,}2$ millions d'hectares.

3. Soit (d_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $d_n=u_n-2\,720$; donc $u_n=d_n+2\,720$.

a. $d_{n+1}=u_{n+1}-2\,720=0{,}996\,25u_n+10{,}2-2\,720=0{,}996\,25\,(d_n+2\,720)-2\,709{,}8$
$=0{,}996\,25u_n+2\,709{,}8-2\,709{,}8=0{,}996\,25d_n$

b. $d_0=u_0-2\,720=1\,280$
Donc la suite (d_n) est géométrique de premier terme $d_0=1\,280$ et de raison $q=0{,}996\,25$.

c. De la nature de la suite (d_n) on déduit que, pour tout n, $d_n=d_0\times q^n=1\,280\times 0{,}996\,25^n$.
Comme $u_n=d_n+2\,720$, on en déduit que, pour tout n, $u_n=1\,280\times 0{,}996\,25^n+2\,720$.

4. **a.** L'année 2013 correspond à $n=0$ donc l'année 2029 correspond à $n=16$. Voici un algorithme permettant d'afficher la superficie occupée par les forêts pour chaque année de 2013 à 2019 :

Variables	u réel k entier
Initialisation	u prend la valeur 4 000

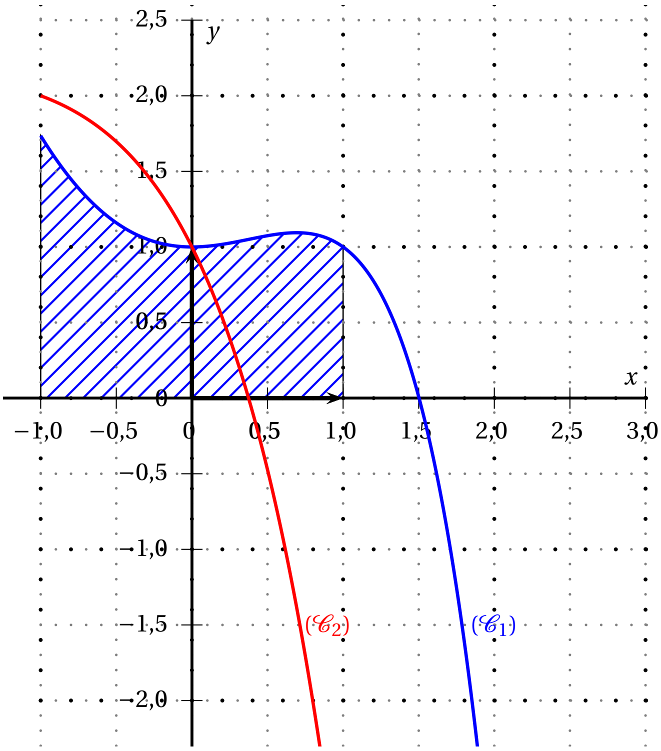
Traitement	Afficher u
	Pour k variant de 1 à 16
	    u prend la valeur $0{,}996\,25u+10{,}2$
	    Afficher u
	Fin Pour

b. La superficie des forêts présentes sur la Terre sera inférieure à 3,9 milliards d'hectares, c'est-à-dire 3 900 millions d'hectares, pour les valeurs de n vérifiant $u_n<3\,900$; on résout cette inéquation :

$$u_n<3\,900 \iff 1\,280\times 0{,}996\,25^n+2\,720<3\,900 \iff 1\,280\times 0{,}996\,25^n<1\,180$$
$$\iff 0{,}996\,25^n<\frac{1\,180}{1\,280} \iff \ln\left(0{,}996\,25^n\right)<\ln\left(\frac{118}{128}\right) \iff n\ln\left(0{,}996\,25\right)<\ln\left(\frac{118}{128}\right)$$
$$\iff n>\frac{\ln\left(\frac{118}{128}\right)}{\ln(0{,}996\,25)}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{118}{128}\right)}{\ln(0{,}996\,25)}\approx 21{,}6$ donc on prendra $n=22$; c'est donc à partir de $2013+22=2035$ que la superficie de forêt deviendra inférieure à 3,9 milliards d'hectares.

Remarque
On peut aussi procéder par approximations successives en utilisant la calculatrice et la formule $u_n=1\,280\times 0{,}996\,25^n+2\,720$: on trouve $u_{21}\approx 3\,902{,}9$ et $u_{22}\approx 3\,898{,}5$.



EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

La courbe ($\mathscr{C}_1$) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-1\,;\,2]$.
La courbe ($\mathscr{C}_2$) ci-dessous représente, dans le repère orthonormé, la fonction f''.
Le point A(0; 1) est situé sur la courbe ($\mathscr{C}_1$).
Le point B est le point d'intersection de ($\mathscr{C}_2$) avec l'axe des abscisses. Une valeur approchée de l'abscisse de B est 0,37. La tangente à la courbe ($\mathscr{C}_1$) au point A est horizontale.

1. Par lecture graphique,

a. Le point A (0 ; 1) appartient à $\mathscr{C}_f$ donc $f(x_{\text{A}}) = y_{\text{A}}$ donc $f(0) = 1$.

b. La tangente à $\mathscr{C}_1$ au point A est horizontale donc $f'(0) = 0$.

c. La fonction f est convexe sur l'intervalle sur lequel la dérivée seconde f'' est positive.
D'après le graphique :

- $f'' > 0$ sur $[-1\,;\,0{,}37[$ donc la fonction f est convexe sur $[-1\,;\,0{,}37[$;
- $f'' < 0$ sur $]0{,}37\,;\,2]$ donc la fonction f est concave sur $]0{,}37\,;\,2]$.

2. Soit f la fonction définie sur $[-1\,;\,2]$ par : $f(x) = (1-x)\text{e}^x + x^2$.
Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	$f(x) := (1-x) * \exp(x) + x^2$ $\rightarrow (1-x)\text{e}^x + x^2$
2	factoriser(dériver($f(x)$)) $\rightarrow x(2-\text{e}^x)$
3	primitive ($f(x)$) $\rightarrow \dfrac{1}{3}x^3 + (-x+2)\text{e}^x$

a. $f(x) = (1-x)\,\text{e}^{\,x} + x^2$ donc
$f'(x) = (-1)\times\,\text{e}^{\,x} + (1-x)\times\,\text{e}^{\,x} + 2x = -\,\text{e}^{\,x} + \,\text{e}^{\,x} - x\,\text{e}^{\,x} + 2x = 2x - x\,\text{e}^{\,x} = x\,(2-\,\text{e}^{\,x})$

b. $2-\mathrm{e}^{x}>0 \iff 2>\mathrm{e}^{x} \iff \ln(2)>x$

On détermine le signe de $f'(x)$ au moyen d'un tableau de signes :

x	-1		0		$\ln(2)$		2
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-\mathrm{e}^{x}$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)=x(2-\mathrm{e}^{x})$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f(-1)=1+2\,\mathrm{e}^{-1}\approx 1{,}74$; $f(0)=1$; $f(\ln(2))=\left(\ln(2)\right)^2-2\ln(2)+2n\approx 1{,}09$ et $f(2)=4-\mathrm{e}^{2}\approx -3{,}39$

On dresse le tableau de variation de f sur $[-1\,;\,2]$:

x	-1		0		$\ln(2)$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$1+2\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\left(\ln(2)\right)^2-2\ln(2)+2$	$\searrow$	$4-\mathrm{e}^{2}$

3. a. $f(0)=1>0$, $f(\ln(2))\approx 1{,}09>0$ et $f(2)\approx -3{,}39<0$

D'après le tableau de variation de f, on peut déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $[-1\,;\,2]$ et que cette solution est dans l'intervalle $]\ln(2)\,;\,2[$.

b. En utilisant la calculatrice, on trouve :

$\left.\begin{array}{l} f(1)=1>0 \\ f(2)\approx -3{,}39<0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\in[1\,;\,2]$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} f(1{,}5)\approx 0{,}009>0 \\ f(1{,}6)\approx -0{,}41<0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\in[1{,}5\,;\,1{,}6]$

$\left.\begin{array}{l} f(1{,}50)\approx 0{,}009>0 \\ f(1{,}51)\approx -0{,}03<0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\in[1{,}50\,;\,1{,}51]$

4. La tangente à une courbe représentant une fonction f au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Pour $a=1$; $f(1)=1$ et $f'(1)=1\left(2-\mathrm{e}^{1}\right)==2-\mathrm{e}$

Donc la tangente a pour équation $y=(2-\mathrm{e})(x-1)+1$ c'est-à-dire $y=(2-\mathrm{e})x-2+\mathrm{e}+1$ ou encore $y=(2-\mathrm{e})x+\mathrm{e}-1$.

5. a. La ligne 3 du tableau de calcul formel donne une primitive de la fonction f ; on l'appelle F et on a donc $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+(-x+2)\,\mathrm{e}^{x}$. On va vérifier que $F'(x)=f(x)$:

$F'(x)=\dfrac{1}{3}\times 3x^2+(-1)\times\mathrm{e}^{x}+(-x+2)\times\mathrm{e}^{x}=x^2+\mathrm{e}^{x}(-1-x+2)=(1-x)\,\mathrm{e}^{x}+x^2=f(x)$

b. On admet que la fonction f est positive sur $[-1\,;\,1]$. Soit $\mathscr{D}$ le domaine compris entre la courbe $(\mathscr{C}_1)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$.

On appelle $\mathscr{A}$ l'aire de ce domaine. D'après le cours, elle vaut, en unités d'aire :

$\mathscr{A}=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-F(-1)=\left[\frac{1}{3}+(2-1)\,\mathrm{e}^{1}\right]-\left[-\frac{1}{3}+(2-(-1))\,\mathrm{e}^{-1}\right]=\frac{2}{3}+\mathrm{e}+3\,\mathrm{e}^{-1}\approx$ 2,3.