Corrigé du baccalauréat Terminale ES/L
Nouvelle Calédonie – mars 2019

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

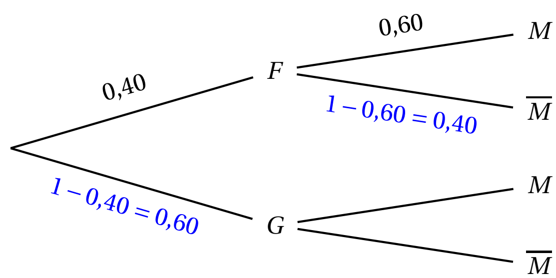
Des professeurs d'éducation physique et sportive proposent à leurs élèves de terminale un cycle de demi-fond qui consiste à courir 3 fois 500 mètres. Le temps cumulé obtenu à l'issue d'un cycle définit une note de performance notée sur 14 points. Le barème est différent entre les garçons et les filles. 4 classes sont regroupées et 40 % des élèves sont des filles. 60 % des filles obtiennent une note de performance supérieure ou égale à 7 sur 14.

Partie A

On choisit un élève au hasard parmi les 120 élèves.
On note :

- F l'évènement : « L'élève est une fille » ;
- G l'évènement : « L'élève est un garçon » ;
- M l'évènement : « La note de performance est supérieure ou égale à 7 sur 14 ».

1. On construit un arbre de probabilités correspondant à cette situation.



2. $P(F \cap M) = P(F) \times P_F(M) = 0,40 \times 0,60 = 0,24$.

3. On donne $P(M) = 0,64$.
D'après la formule des probabilités totales : $P(M) = P(F \cap M) + P(G \cap M)$
On en déduit : $P(G \cap M) = P(M) - P(F \cap M) = 0,64 - 0,24 = 0,4$.
On a donc $P_G(M) = \dfrac{P(G \cap M)}{P(G)} = \dfrac{0,4}{0,6} \approx 0,667$.

4. Sachant qu'une personne interrogée a obtenu une note de performance supérieure ou égale à 7 points sur 14, la probabilité que ce soit une fille est $P_M(F) = \dfrac{P(F \cap M)}{P(M)} = \dfrac{0,24}{0,64} = 0,375$.

Partie B

On considère un groupe de 70 filles d'un autre établissement. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de filles de ce groupe ayant une note de performance supérieure ou égale à 7 sur 14. Les notes obtenues sont indépendantes les unes des autres. On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 70$ et $p = 0,6$.
La probabilité qu'exactement 30 filles obtiennent une note de performance supérieure ou égale à 7 est $P(X = 30) = \dbinom{70}{30} \times 0,6^{30} \times (1 - 0,6)^{70-30}$ dont l'arrondi au dix-millième est égal à 0,001 5.

Partie C

Cette épreuve permet de développer sa VMA (vitesse maximale aérobie) qui correspond à une vitesse de course rapide. L'unité de mesure de la VMA est le km/h. On choisit un élève au hasard parmi les 120 élèves. On admet que la VMA d'un élève pris au hasard est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 11{,}8$ et d'écart type $\sigma = 1{,}2$.

1. La probabilité qu'un élève de terminale de ce lycée ait une VMA comprise entre 10 et 13 km/h est $P(10 \leqslant Y \leqslant 13) \approx 0{,}775$ (calculatrice).
2. La valeur arrondie au dixième de α tel que $P(Y \leqslant \alpha) = 0{,}8$ est 12,8 (calculatrice).
   On peut interpréter ce résultat en disant que le pourcentage d'élèves ayant une VMA inférieure ou égale à 12,8 km/h est de 80 %.

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Soit f la fonction continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   La valeur exact de $f'(\text{e})$ est :

   a. $\boxed{0}$ **b.** $\dfrac{1}{\text{e}}$ **c.** 1 **d.** e^2

   $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ donc $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$
   $f'(\text{e}) = \dfrac{1 - \ln(\text{e})}{\text{e}^2} = \dfrac{1-1}{\text{e}^2} = 0$

2. Entre janvier 2005 et décembre 2012, le prix hors taxe du tarif réglementé du gaz a augmenté de 80 %.
   Quel est le taux annuel d'augmentation du prix du gaz sur la même période arrondi à 0,01 % ?

   a. 10 % **b.** $\boxed{7{,}62\,\%}$ **c.** 6,75 % **d.** 8,76 %

   Augmenter de 80 %, c'est multiplier par 1,8.
   Il y a 8 années entre janvier 2005 et décembre 2012, donc on cherche le taux t tel que $(1+t)^8 = 1{,}8$.
   On a donc $1 + t = 1{,}8^{\frac{1}{8}}$ donc $1 + t \approx 1{,}0762$ qui correspond à une augmentation annuelle de 7,62 %.

3. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 1{,}05$ et de premier terme $u_1 = 3$.
   La valeur exacte de $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{49}$ est égale à :

   a. $S = \dfrac{1 - 1{,}05^{49}}{1 - 1{,}05}$ **c.** $S = 595{,}280$

   b. $S = 3 \times \dfrac{1 + 1{,}05^{49}}{1 + 1{,}05}$ **d.** $\boxed{S = 3 \times \dfrac{1 - 1{,}05^{49}}{1 - 1{,}05}}$

   On applique la formule $S = \text{premier terme} \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

4. Lors du passage en caisse dans un supermarché, on considère que le temps d'attente d'un client, exprimé en minute, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;12]$.
   Quelle est la probabilité que le temps d'attente d'un client soit compris entre 2 et 5 minutes ?

a. $\boxed{\dfrac{1}{4}}$ **b.** $\dfrac{7}{12}$ **c.** $\dfrac{1}{12}$ **d.** $\dfrac{1}{3}$

Si la variable aléatoire qui donne le temps d'attente s'appelle T, on a :
$P\left(T \in [2\,;5]\right) = \dfrac{5-2}{12-0} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

Partie B

1. Lors d'une élection, un candidat sollicite un institut de sondage pour qu'il détermine un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion des intentions de vote en sa faveur.

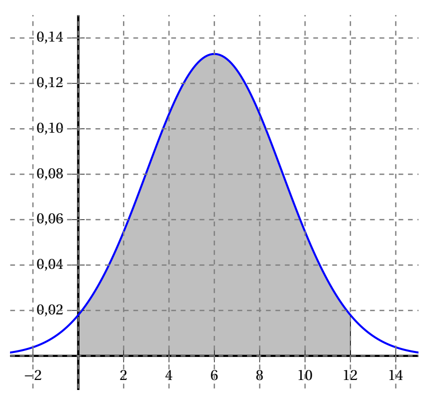
Affirmation 1 : Afin que cet intervalle ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02, l'institut de sondage doit interroger au minimum 10 000 personnes.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est donné par $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, où f est la fréquence des intentions de vote dans un échantillon de taille n. L'amplitude de cet intervalle est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. Cette amplitude est inférieure ou égale à 0,02 si et seulement si

$\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}02 \iff \dfrac{2}{0{,}02} \leqslant \sqrt{n} \iff 100 \leqslant \sqrt{n} \iff 10000 \leqslant n$

Affirmation 1 vraie

2. On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne 6.
On donne ci-dessous la courbe qui représente la densité f associée à la variable aléatoire X.
La partie grisée vaut 0,95 unité d'aire.



Affirmation 2 : L'écart type de X est égal à 6.

D'après le graphique : $P(0 \leqslant X \leqslant 12) = 0{,}95$ autrement dit $P(6-2\times3 \leqslant X \leqslant 6+2\times3) = 0{,}95$.
On sait que $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ et que $\mu = 6$, donc on peut en déduire que $\sigma \approx 3$.

Affirmation 2 fausse

Exercice 3 **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Une colonie de vacances héberge des enfants dans des tentes de 10 places chacune. Pendant l'été 2017, 160 enfants ont participé à cette colonie. À la suite d'une étude prévisionnelle, on estime que, chaque année, 80 % des enfants déjà inscrits se réinscrivent l'année suivante et 50 nouveaux enfants les rejoignent.

1. **a.** Il y a 160 inscrits en 2017. On en garde 80 % donc on en garde $160 \times \dfrac{80}{100} = 128$.
Comme il y a 50 nouveaux, cela fait $128 + 50 = 178$ inscrits pour 2018.

b. Pour loger 178 enfants dans des tentes de 10 places, il faut 18 tentes.

2. Soit (u_n) la suite numérique qui modélise le nombre d'inscrits lors de l'année $2017 + n$. Ainsi $u_0 = 160$.

Prendre 80 %, c'est multiplier par 0,8.

Comme il y a 50 nouveaux chaque année, on passe du nombre d'inscrits l'année n à l'année $n+1$ en multipliant par 0,8 puis en ajoutant 50 ; donc, pour tout n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.

3. Voici la copie d'écran d'une feuille de tableur utilisée pour déterminer les valeurs des termes de la suite.

	A	B	C	D	E	F	G
1	indice n	0	1	2	3	4	5
2	valeur de $u(n)$	160					

a. La formule que l'on peut saisir dans la cellule C2 pour obtenir, par recopie vers la droite, le nombre d'inscrits l'année $2017 + n$ est `= 0.8*B2 + 50`.

b. On complète ce tableau en arrondissant chacune des valeurs à l'entier :

	A	B	C	D	E	F	G
1	indice n	0	1	2	3	4	5
2	valeur de $u(n)$	160	178	192	204	213	221

c. $2021 = 2017 + 4$ donc une estimation du nombre d'inscrits en 2021 est $u_4 = 213$.

4. Soit (v_n) la suite numérique dont le terme général est défini par $v_n = u_n - 250$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc on a : $u_n = v_n + 250$.

a.
- $v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 0,8u_n + 50 - 250 = 0,8(v_n + 250) - 200 = 0,8v_n + 200 - 200 = 0,8v_n$
- $v_0 = u_0 - 250 = 160 - 250 = -90$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de terme initial $v_0 = -90$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = -90 \times 0,8^n$.

c. $v_n = -90 \times 0,8^n$ et $u_n = v_n + 250$ donc, pour tout n, $u_n = 250 - 90 \times 0,8^n$.

d. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 et $0 < 0,8 < 1$ donc la suite (v_n) a pour limite 0.
Comme $u_n = v_n + 250$, on en déduit que la suite (u_n) a pour limite 250.
Cela veut dire que si le modèle est correct, le nombre d'inscrits va tendre vers 250.

5. En 2017, la colonie comptait 22 tentes donc pouvait loger 220 enfants.

Il faudra construire une nouvelle tente quand le nombre d'enfants dépassera 220.

Afin de déterminer à partir de quelle année il sera nécessaire de construire une nouvelle tente, on propose un algorithme.

a. On complète l'algorithme proposé :

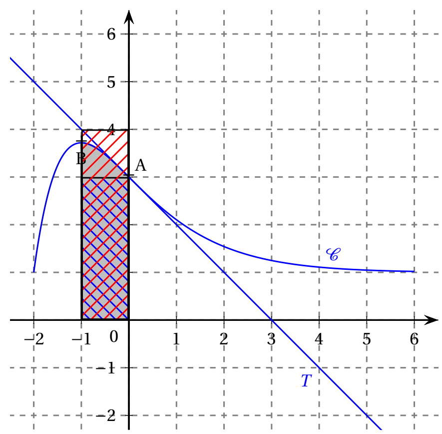
```
U ← 160
N ← 0
Tant que U ⩽ 220 faire
        U ← 0,8U + 50
        N ← N + 1
Fin tant que
```

b. On a calculé dans le tableau $u_5 = 221 > 220$ donc la valeur de N après exécution de cet algorithme est 5.

Exercice 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[-2 ; 6]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.
Le point A de coordonnées $(0 ; 3)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-2 ; 6]$.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point B d'abscisse -1.



Partie A

1. $A \in \mathscr{C}$ donc $f(0) = 3$.
2. $f'(0) = -1$, donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A a pour équation $y = -x + 3$.
3. D'après les variations de la fonction f, $f' > 0$ sur $[-2 ; -1[$ et $f' < 0$ sur $]-1 ; 6]$..
4. f est concave sur $[-2 ; 0[$ et convexe sur $]0 ; 6]$.
5. $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$, donc $3 < I < 4$.

Partie B

La fonction f est définie par $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x} + 1$ pour tout $x \in [-2 ; 6]$.

1. $f(6) = (6+2)\,\mathrm{e}^{-6} + 1 = 8\,\mathrm{e}^{-6} + 1 \approx 1{,}02$
2. Pour tout $x \in [-2 ; 6]$, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} + 0 = (1 - x - 2)\,\mathrm{e}^{-x} = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
3. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$ donc s'annule et change de signe pour $x = -1$.
   $f(-2) = (-2+2)\,\mathrm{e}^{2} + 1 = 1$; $f(-1) = (-1+2)\,\mathrm{e}^{1} + 1 = \mathrm{e} + 1 \approx 3{,}72$
   On établit le tableau de variations de la fonction f sur $[-2 ; 6]$:

x	-2		-1		6
$-x-1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\mathrm{e}+1$	$\searrow$	$8\,\mathrm{e}^{-6}+1$

4. Un logiciel de calcul formel donne l'information suivante :

`Dériver` $\left((-x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\right)$
$(x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$

a. Soit F la fonction définie sur $[-2\,;\,6]$ par $F(x) = (-x-3)\,\mathrm{e}^{-x} + x$.
D'après le logiciel de calcul formel, $F'(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x} + 1 = f(x)$ donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[-2\,;\,6]$.

b. La valeur moyenne de f sur $[-1\,;\,0]$ est $V = \dfrac{1}{0-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = I$.
D'après le cours : $I = F(0) - F(-1) = \left(-3\,\mathrm{e}^{0} + 0\right) - \left(-2\,\mathrm{e}^{1} + (-1)\right) = 2\,\mathrm{e} - 2 \approx 3{,}4$