Corrigé du baccalauréat ES Métropole – La Réunion
14 septembre 2016

Exercice 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

À partir d'une étude statistique dans une chaîne de restaurants, on a modélisé le comportement des clients par :

- 60 % des clients sont des hommes ;
- 80 % des hommes mangent un dessert alors que seulement 45 % des femmes en mangent un.

On interroge au hasard un client de cette chaîne. On note :

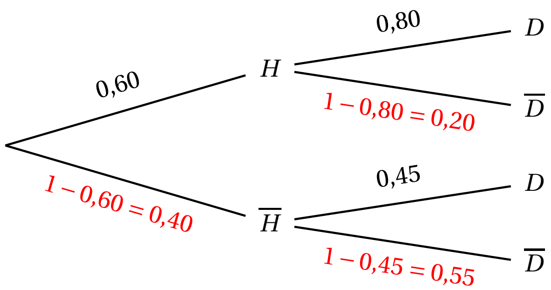
- H l'évènement « le client interrogé est un homme » ;
- D l'évènement « le client interrogé a mangé un dessert ».

On note également :

- $\overline{A}$ l'évènement contraire d'un évènement A ;
- $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

Partie A

1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. L'événement « être un homme et avoir mangé un dessert » est $H \cap D$.
$p(H \cap D) = p(H) \times p_H(D) = 0{,}60 \times 0{,}80 = 0{,}48$

3. D'après la formule des probabilités totales :
$p(D) = p(H \cap D) + p(\overline{H} \cap D) = 0{,}48 + 0{,}40 \times 0{,}45 = 0{,}48 + 0{,}18 = 0{,}66$

4. Le client interrogé affirme avoir pris un dessert. La probabilité que ce soit une femme est $p_D(\overline{H})$:

$$p_D(\overline{H}) = \frac{p(\overline{H} \cap D)}{p(D)} = \frac{0{,}18}{0{,}66} = \frac{3}{11} \approx 0{,}273$$

Partie B

Le directeur de cette chaîne souhaite savoir si ses clients actuels sont satisfaits des menus proposés dans ses restaurants. Une enquête de satisfaction est réalisée sur un échantillon de 300 clients et 204 se déclarent satisfaits des menus proposés.

1. Un intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion de clients satisfaits est donné par
$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
dans lequel f représente la fréquence des clients satisfaits dans l'échantillon dont la taille est n.
$n=300$ et $f=\dfrac{204}{300}=0{,}68$
L'intervalle de confiance est donc $\left[0{,}68-\dfrac{1}{\sqrt{300}}\ ;\ 0{,}68+\dfrac{1}{\sqrt{300}}\right]\approx[0{,}622\ ;\ 0{,}738]$.

2. Le directeur souhaite cependant avoir une estimation plus précise et donc veut un intervalle de confiance au niveau de 95 % d'amplitude 0,06.
L'amplitude de l'intervalle $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$; on cherche donc n tel que
$\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0{,}06$:
$\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0{,}06 \iff \dfrac{2}{0{,}06}=\sqrt{n} \iff \dfrac{4}{0{,}0036}=n$; or $\dfrac{4}{0{,}0036}\approx 1111{,}11$
donc on prendra $n=1112$ pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit inférieure à 0,06.

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 4 points

PARTIE A

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 90 et d'écart-type 6. Une valeur arrondie au millième de $p(X\geqslant 100)$ est :

   a. 0,500 **b.** 0,452 **c.** $\boxed{0{,}048}$ **d.** 0,952

   On obtient le résultat à la calculatrice.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type 10. Une valeur arrondie au millième de $p\left(\mu-20\leqslant Y\leqslant \mu+20\right)$ est :

   a. 0,68 **b.** 0,5 **c.** 0,8 **d.** $\boxed{0{,}95}$

   On sait que si Y suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors $p(\mu-2\sigma\leqslant Y\leqslant \mu+2\sigma)\approx 0{,}95$.
   Et comme $\sigma=10$, $2\sigma=20$.

PARTIE B

Pour les deux questions suivantes, on considère une fonction f deux fois dérivable sur $[-5;3]$. On donne ci-dessous le tableau de variation de f'.

x	-5		-1	1	3
Variation de f'	$-0{,}5$	$\searrow$	-3	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	4

3. La fonction f est :

   a. croissante sur $[-5\ ;\ 3]$

b. $\boxed{\text{décroissante sur } [-5\,;\,1]}$ car $f' < 0$ sur $[-5\,;\,1]$

c. décroissante sur $[-5\,;\,3]$

d. croissante sur $[-1\,;\,3]$

4. La fonction f est :

a. convexe sur $[-5\,;\,-1]$

b. $\boxed{\text{concave sur } [-5\,;\,-1]}$ car f' décroissante sur $[-5\,;\,-1]$

c. concave sur $[-5\,;\,1]$

d. convexe sur $[-5\,;\,3]$

EXERCICE 3 Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L 5 points

Le 31 décembre 2015 une forêt comportait 1 500 arbres. Les exploitants de cette forêt prévoient que chaque année, 5 % des arbres seront coupés et 50 arbres seront plantés.
On modélise le nombre d'arbres de cette forêt par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n est le nombre d'arbres au 31 décembre de l'année $(2015+n)$. Ainsi $u_0 = 1\,500$.

PARTIE A

1. Comme 5 % des arbres sont coupés, il en reste $1\,500 - 0,05 \times 1\,500 = 1\,425$.
On en replante chaque année 50 donc $u_1 = 1\,425 + 50 = 1\,475$.

Comme 5 % des arbres sont coupés, il en reste $1\,475 - 0,05 \times 1\,475 \approx 1\,401$.
On en replante chaque année 50 donc $u_2 = 1\,401 + 50 = 1\,451$.

2. Retirer 5 %, c'est multiplier par $1 - 0,05 = 0,95$.
Pour avoir le nombre d'arbres l'année $n+1$ en fonction du nombre d'arbres l'année n, on multipliera par 0,95 et on ajoutera 50 puisqu'on replante chaque année 50 arbres.
Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 50$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 1\,000$, donc $u_n = v_n + 1\,000$.

a.
- $v_{n+1} = u_{n+1} - 1\,000 = 0,95u_n + 50 - 1\,000 = 0,95(v_n + 1\,000) - 950 = 0,95v_n + 950 - 950 = 0,95v_n$
- $v_0 = u_0 - 1\,000 = 1\,500 - 1\,000 = 500$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = 500$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,95^n$ et donc que, pour tout n, $u_n = 1\,000 + 500 \times 0,95^n$.

c. $2030 = 2015 + 15$ donc le nombre d'arbres prévisibles en 2030 est u_{15}.
À la calculatrice, on trouve $u_{15} \approx 1232$.

PARTIE B

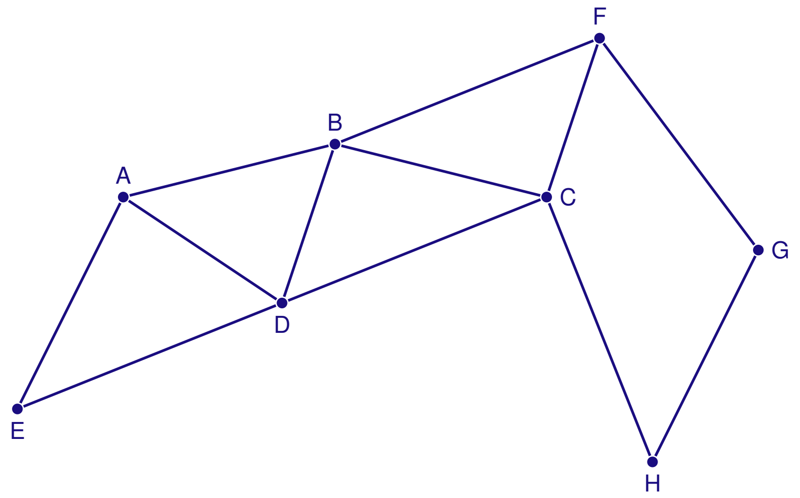
Les arbres coupés dans cette forêt sont utilisés pour le chauffage. Le prix d'un stère de bois (unité de volume mesurant le bois) augmente chaque année de 3 %.
Augmenter de 3 %, c'est multiplier par 1,03 ; on cherche donc la première valeur de n telle que $1,03^n \geqslant 2$.
On résout cette inéquation :

$$\begin{array}{rcll} 1{,}03^n \geqslant 2 & \iff & \ln\left(1{,}03^n\right) \geqslant \ln(2) & \text{car la fonction ln est strictement croissante sur } [0\,;\,+\infty[\\ & \iff & n \times \ln(1{,}03) \geqslant \ln(2) & \text{propriété de la fonction ln} \\ & \iff & n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)} & \text{car } \ln 1{,}03 > 0 \end{array}$$

Or $\dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)} \approx 23{,}4$ donc le prix d'un stère de bois aura doublé au bout de 24 années.

EXERCICE 3 Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un parc de loisirs décide d'ouvrir une nouvelle attraction pour les jeunes enfants : un parcours pédestre où chaque enfant doit recueillir, sur différents lieux, des indices pour résoudre une énigme. Le parcours est représenté par le graphe ci-dessous. Les sommets représentent des lieux où sont placés les indices; les arêtes représentent des chemins pédestres qui les relient.



PARTIE A

1. Un enfant peut parcourir chaque chemin pédestre du circuit une fois et une seule si le graphe possède 0 ou 2 sommets de degré impair (théorème d'Euler).
   On cherche les degrés des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	3	4	4	4	2	3	2	2

   Il y a deux sommets de degrés impairs, donc il existe un trajet empruntant chaque chemin pédestre une fois et une seule (un chemin eulérien du graphe) partant d'un de ces sommets et arrivant à l'autre; par exemple :
   AE – ED – DA – AB – BD – DC – CB – BF – FC – CH – HG – GF

2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

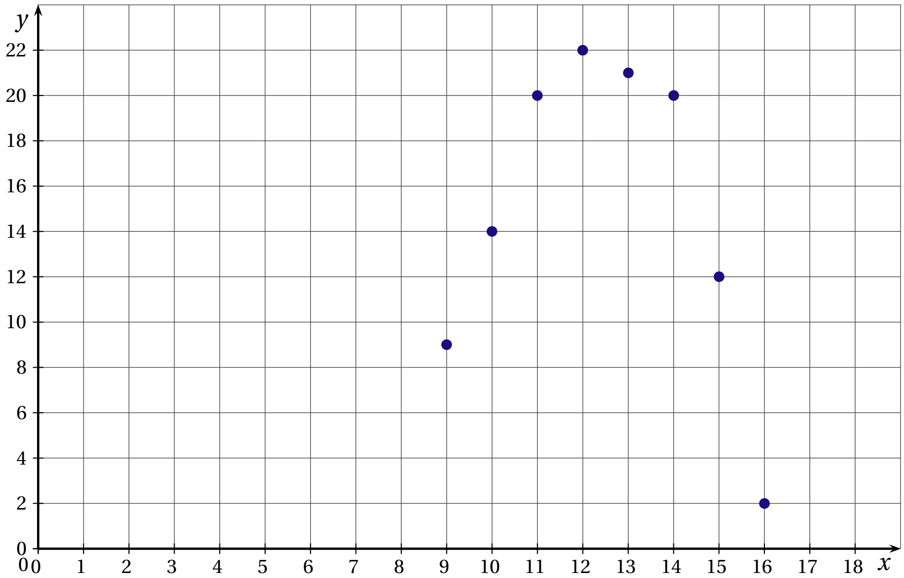
   On donne la matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 20 & 21 & 11 & 13 & 5 & 5 \\ 18 & 32 & 25 & 25 & 17 & 16 & 10 & 10 \\ 20 & 25 & 31 & 19 & 13 & 13 & 14 & 5 \\ 21 & 25 & 19 & 31 & 13 & 21 & 4 & 12 \\ 11 & 17 & 13 & 13 & 11 & 6 & 4 & 3 \\ 13 & 16 & 13 & 21 & 6 & 20 & 3 & 13 \\ 5 & 10 & 14 & 4 & 4 & 3 & 9 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 12 & 3 & 13 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Le nombre de parcours allant de E (sommet n° 5) à H (sommet n° 8) en 4 chemins pédestres est le nombre de la matrice M^4 situé à la ligne 5 et la colonne 8 : il y a donc trois chemins de longueur 4 reliant E à H :

EA – AD – DC – CH ; ED – DB – BC – CH ; EA – AB – BC – CH

PARTIE B

Afin d'améliorer la qualité de ses services, une étude statistique a relevé la durée moyenne d'attente en minutes à la billetterie du parc en fonction de l'heure. Ce relevé a eu lieu chaque heure de 9 h à 16 h. On obtient le relevé suivant :



Ainsi, à 10 h, il y avait 14 minutes d'attente à la billetterie.
On souhaite modéliser cette durée d'attente par une fonction qui à l'heure associe la durée d'attente en minutes. Ainsi, il sera possible d'avoir une estimation de la durée d'attente.
On choisit de modéliser cette situation à l'aide de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b, c des réels et a non nul telle que les trois points (9 ; 9), (11 ; 20) et (16 ; 2) appartiennent à la représentation graphique de f.

1. On appelle $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

Le point de coordonnées (9 ; 9) appartient à $\mathscr{C}_f \iff f(9) = 9 \iff 81a + 9b + c = 9$
Le point de coordonnées (11 ; 20) appartient à $\mathscr{C}_f \iff f(11) = 20 \iff 121a + 11b + c = 20$
Le point de coordonnées (16 ; 2) appartient à $\mathscr{C}_f \iff f(16) = 2 \iff 256a + 16b + c = 2$

Il faut donc résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 81a &+& 9b &+& c &=& 9\\ 121a &+& 11b &+& c &=& 20\\ 256a &+& 16b &+& c &=& 2\end{array}\right.$

Le système est équivalent à l'équation matricielle : $\begin{pmatrix} 81 & 9 & 1\\ 121 & 11 & 1\\ 256 & 16 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\\ 20\\ 2\end{pmatrix}$

On trouve à la calculatrice que $\begin{pmatrix} 81 & 9 & 1\\ 121 & 11 & 1\\ 256 & 16 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{14} & -\dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{35}\\ -\dfrac{27}{14} & \dfrac{5}{2} & -\dfrac{4}{7}\\ \dfrac{88}{7} & -\dfrac{72}{5} & \dfrac{99}{35}\end{pmatrix}$

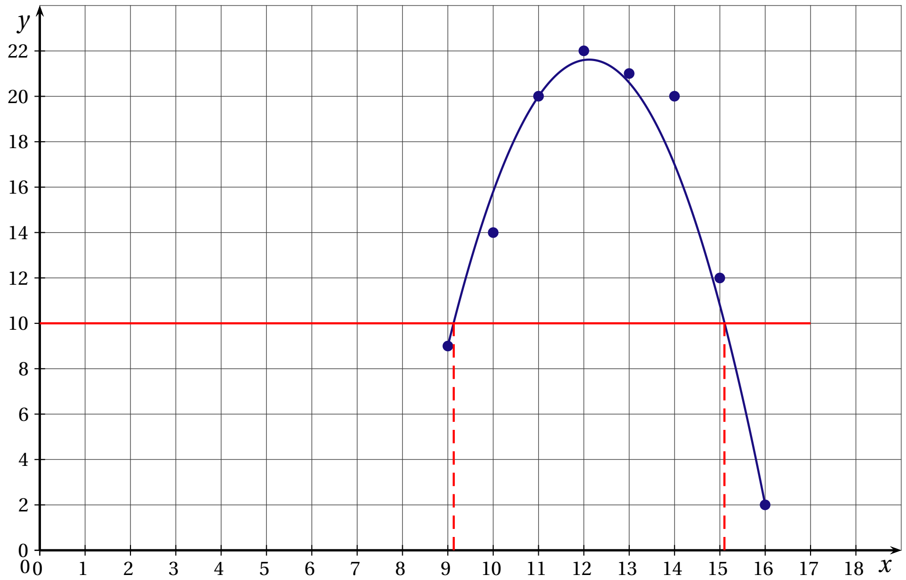
$$\begin{pmatrix}81 & 9 & 1\\121 & 11 & 1\\256 & 16 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\20\\2\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}81 & 9 & 1\\121 & 11 & 1\\256 & 16 & 1\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}9\\20\\2\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{14} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{35}\\-\frac{27}{14} & \frac{5}{2} & -\frac{4}{7}\\\frac{88}{7} & -\frac{72}{5} & \frac{99}{35}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}9\\20\\2\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{10}\\\frac{63}{2}\\-\frac{846}{5}\end{pmatrix}$$

Donc $a=-\dfrac{13}{10}=-1{,}3$, $b=\dfrac{63}{2}=31{,}5$ et $c=-\dfrac{846}{5}=-169{,}2$ et on peut dire que

$$f(x)=-1{,}3x^2+31{,}5x-169{,}2.$$

2. En utilisant ce modèle, on détermine sur quelle(s) plage(s) horaire(s) l'attente peut être inférieure à dix minutes.



Il faut donc résoudre l'inéquation $f(x)<10$:

$f(x)<10\iff -1{,}3x^2+31{,}5x-169{,}2<10\iff -1{,}3x^2+31{,}5x-179{,}2<0$

$\Delta=31{,}5^2-4\times(-1{,}3)\times(-179{,}2)=60{,}41>0$

Les solutions de l'équation $f(x)=10$ sont $\dfrac{-31{,}5-\sqrt{60{,}41}}{2\times(-1{,}3)}\approx 15{,}1$ et $\dfrac{-31{,}5+\sqrt{60{,}41}}{2\times(-1{,}3)}\approx 9{,}1$

$f(x)$ est du signe de $-1{,}3$ donc négatif à l'extérieur des racines donc pour $x<9{,}1$ et $x>15{,}1$.

$9{,}1=9+\dfrac{1}{10}=9+\dfrac{6}{60}=9$ h 6 min ; de même $15{,}1=15$ h 6 min.

L'attente peut être inférieure à dix minutes entre 9 heures et 9 heures 6 minutes puis entre 15 heures 6 minutes et 16 heures.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 6 points

On définit une fonction g sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 5]$ par $g(x)=5x-3x\ln x$.

1. La fonction g est dérivable sur $[0{,}5\ ;\ 5]$ et $g'(x)=5-\left(3\ln x+3x\times\dfrac{1}{x}\right)=5-3\ln x-3=2-3\ln x$.

2. $g'(x) > 0 \iff 2 - 3\ln x > 0 \iff 2 > 3\ln x \iff \dfrac{2}{3} > \ln x \iff \mathrm{e}^{\frac{2}{3}} > x$

Donc la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0,5\,;\ \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\right]$, et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\,;\ 5\right]$.

3. La fonction g admet un maximum pour $x_0 = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}95$.

4. $g(0.5) = 2{,}5 - 1{,}5\ln 0{,}5 \approx 3{,}54 < 4$; $g\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\right) = 3\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \approx 5{,}84 > 4$ et $g(5) = 25 - 15\ln 5 \approx 0{,}86 < 4$

On établit le tableau de variations de la fonction g :

x	$0{,}5$		α_1		x_0		α_2		5
					$3\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \approx 5{,}84$				
$g(x)$		$\nearrow$	4	$\nearrow$		$\searrow$	4	$\searrow$	
	$2{,}5 - 1{,}5\ln 0{,}5 \approx 3{,}54$								$25 - 15\ln 5 \approx 0{,}86$

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 4$ admet deux solutions α_1 et α_2 sur l'intervalle $[0{,}5\,;\ 5]$.

$\left.\begin{array}{l} g(0{,}5) \approx 3{,}5 < 4 \\ g(1) = 5 > 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 \in [0{,}5\,;\ 1]$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} g(0{,}6) \approx 3{,}9 < 4 \\ g(0{,}7) \approx 4{,}2 > 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 \in [0{,}6\,;\ 0{,}7]$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} g(0{,}62) \approx 3{,}99 < 4 \\ g(0{,}63) \approx 4{,}02 > 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$
$\alpha_1 \in [0{,}62\,;\ 0{,}63]$

$\left.\begin{array}{l} g(3) \approx 5.1 > 4 \\ g(4) \approx 3{,}4 < 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_2 \in [3\,;\ 4]$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} g(3{,}6) \approx 4{,}17 > 4 \\ g(3{,}7) \approx 3{,}98 < 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_2 \in [3{,}6\,;\ 3{,}7]$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} g(3{,}68) \approx 4{,}02 > 4 \\ g(3{,}69) \approx 3{,}997 < 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$
$\alpha_2 \in [3{,}68\,;\ 3{,}69]$

5. D'après le tableau de variations, $g(x) \geqslant 4 \iff x \in [\alpha_1\,;\ \alpha_2]$.

6. La fonction G définie sur $[0{,}5\,;\ 5]$ par $G(x) = -\dfrac{3}{2}x^2\ln x + \dfrac{13}{4}x^2$ est une primitive de g si $G' = g$:

$G'(x) = -\dfrac{3}{2} \times 2x \times \ln x - \dfrac{3}{2}x^2 \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{13}{4} \times 2x = -3x\ln x - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{13}{2}x = 5x - 3x\ln x = g(x)$

Donc la fonction G est une primitive de la fonction g sur $[0{,}5\,;\ 5]$.

7. La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0{,}5\,;\ 5]$ est :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5-0{,}5}\int_{0{,}5}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4{,}5}\Big[G(x)\Big]_{0{,}5}^{5} = \frac{1}{4{,}5}\Big[G(5) - G(0{,}5)\Big] \\
&= \frac{1}{4{,}5}\left[\left(-\frac{75}{2}\ln 5 + \frac{14}{4} \times 25\right) - \left(-\frac{3}{2} \times 0{,}25\ln 0{,}5 + \frac{13}{4} \times 0{,}25\right)\right] \\
&= \frac{1}{4{,}5}\left(-\frac{75}{2}\ln 5 + \frac{3}{8}\ln 0{,}5 + \frac{1287}{16}\right) \\
&\approx 4{,}405
\end{aligned}$$