Corrigé du baccalauréat ES/L Métropole–La Réunion
11 septembre 2015

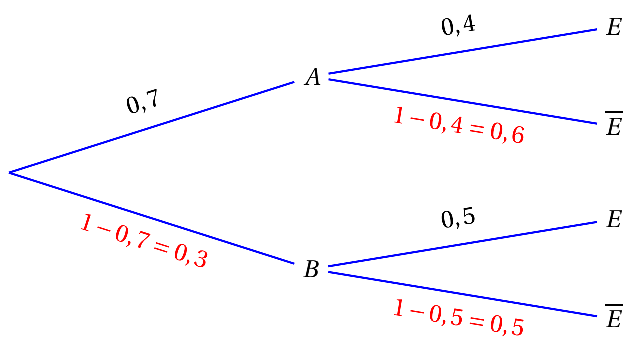
Exercice 1 **Commun à tous les candidats** **7 points**

Lors d'une opération promotionnelle, un magasin d'électroménager propose deux modèles de téléviseurs : un modèle A et un modèle B.
On s'intéresse aux acheteurs qui profitent de cette promotion.
70 % des acheteurs choisissent un téléviseur de modèle A.
Pour ces deux téléviseurs, le magasin propose une extension de garantie de 5 ans.
40 % des acheteurs du téléviseur de modèle A choisissent l'extension de garantie et 50 % des acheteurs du téléviseur de modèle B choisissent cette extension.
On interroge au hasard un acheteur à la sortie du magasin.
Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième. Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.
On note :
A l'évènement « Un acheteur choisit le téléviseur de modèle A » ;
B l'évènement « Un acheteur choisit le téléviseur de modèle B » ;
E l'évènement « Un acheteur choisit l'extension de garantie »,

On note $p(A)$ la probabilité de l'évènement A.

Partie A

1. On construit un arbre pondéré traduisant la situation :



2. L'événement « choix du modèle A avec extension de garantie » est l'événement $A \cap E$.
D'après l'arbre : $p(A \cap E) = p(A) \times p_A(E) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$
3. On calcule $p(E)$ en utilisant la formule des probabilités totales :
$p(E) = p(A \cap E) + p(B \cap E) = 0,28 + 0,3 \times 0,5 = 0,28 + 0,15 = 0,43$
4. Un acheteur n'a pas pris l'extension de garantie ; on cherche la probabilité qu'il ait acheté le modèle A, c'est-à-dire $p_{\overline{E}}(A)$.
$$p_{\overline{E}}(A) = \frac{p(A \cap \overline{E})}{p(\overline{E})} = \frac{0,7 \times 0,6}{1 - 0,43} = \frac{0,42}{0,57} \approx 0,737$$

Partie B

Le directeur du magasin interroge au hasard 210 clients et note que 123 trouvent l'opération promotionnelle qu'il propose intéressante.
La fréquence de clients trouvant l'opération promotionnelle intéresante est $f = \dfrac{123}{210}$.

On regarde si les conditions pour déterminer un intervalle avec un niveau de confiance de plus de 95 % sont réunies : $n = 210 \geqslant 30$; $nf = 123 \geqslant 5$ et $n(1 - f) = 87 \geqslant 5$. Les conditions sont donc réunies.
L'intervalle de confiance au seuil de 95 % pour la proportion de clients qui trouvent l'opération promotionnelle intéressante est donc :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{123}{210} - \frac{1}{\sqrt{210}}\,;\, \frac{123}{210} + \frac{1}{\sqrt{210}}\right] \approx [0,516\,;\, 0,655]$$

Partie C

Pour sa prochaine promotion, le directeur s'intéresse à l'âge de ses clients. On modélise l'âge des clients en années par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 40$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

1. À la calculatrice, on trouve : $p(X > 60) \approx 0,006$
   La probabilité qu'un client ait plus de 60 ans est d'environ 0,006.
2. À la calculatrice, on trouve : $p(30 < X < 50) \approx 0,789$
   La probabilité qu'un client ait un âge compris entre 30 et 50 ans est d'environ 0,789.

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 5 points

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

Partie A - À l'aide d'un graphique

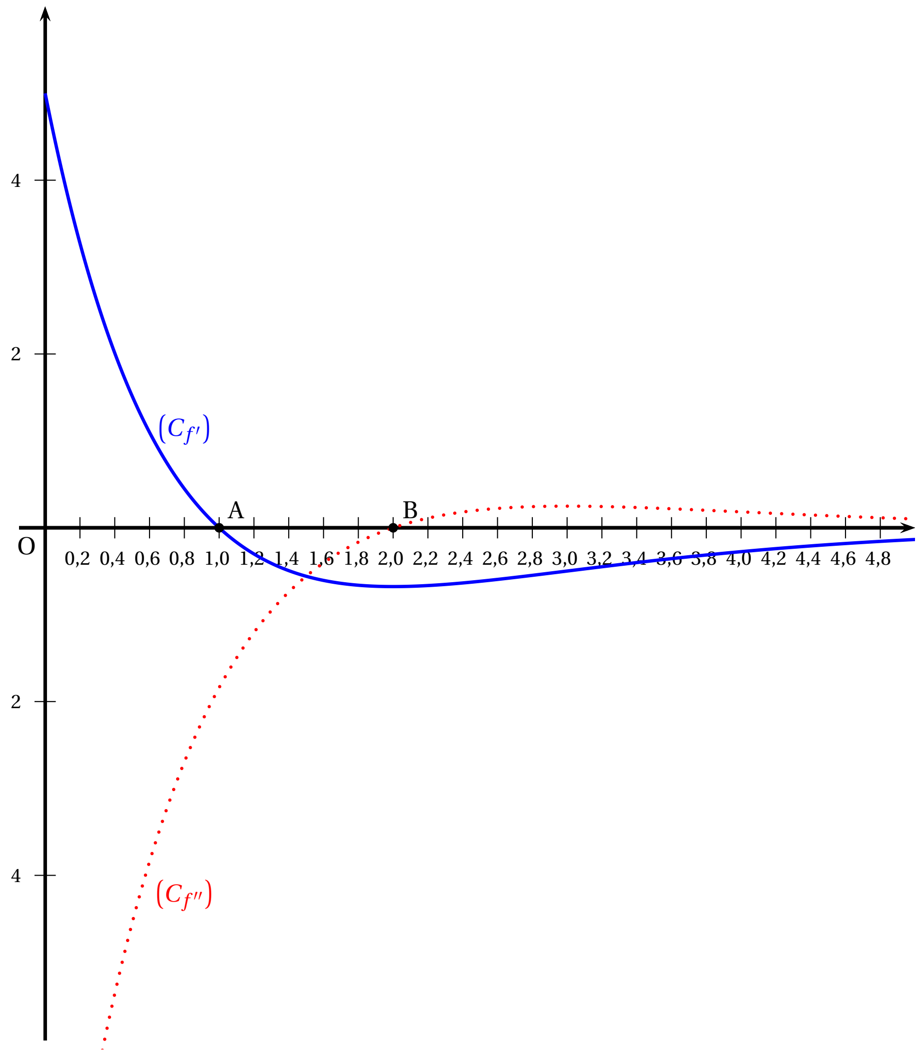
On a représenté ci-dessous la courbe $\left(C_{f'}\right)$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $\left(C_{f''}\right)$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0\,;\,5]$. Le point A de coordonnées $(1\,;\,0)$ appartient à $\left(C_{f'}\right)$ et le point B de coordonnées $(2\,;\,0)$ appartient à la courbe $\left(C_{f''}\right)$.

1. La fonction dérivée f' est strictement positive sur $[0\,;\,1[$, et elle est strictement négative sur $]1\,;\,5]$; donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, et elle est strictement décroissante sur $[1\,;\,5]$
2. La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels la fonction dérivée seconde f'' est positive, donc sur l'intervalle $[2\,;\,5]$.
3. La courbe de f admet des points d'inflexion quand la dérivée seconde de la fonction f s'annule et change de signe; donc la courbe de f admet sur $[0\,;\,5]$ un point d'inflexion d'abscisse 2.

Partie B - Étude de la fonction

La fonction f est définie sur $[0\,;\,5]$ par $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$

1. Pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f(x) = 5x\,\mathrm{e}^{-x}$ est positive sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,5]$ par $F(x) = (-5x - 5)\mathrm{e}^{-x}$.
   La fonction F est dérivable sur $[0\,;\,5]$ et
   $F'(x) = -5\,\mathrm{e}^{-x} + (-5x - 5)(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (-5 + 5x + 5)\,\mathrm{e}^{-x} = 5x\,\mathrm{e}^{-x} = f(x)$
   Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,5]$.
3. La fonction f est positive sur $[0\,;\,1]$ donc l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est : $A = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   $A = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = -10\,\mathrm{e}^{-1} - (-5) = 5 - \frac{10}{\mathrm{e}}$



La valeur exacte de l'aire cherchée est $5 - \dfrac{10}{\text{e}}$ unité d'aire.

Exercice 3 — Candidats n'ayant pas suivi la spécialité, candidats de L — 5 points

Dans une ville, un opéra décide de proposer à partir de 2014 un abonnement annuel pour ses spectacles. L'évolution du nombre d'abonnés d'une année à la suivante est modélisée par le directeur de l'opéra qui prévoit que 75 % des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante et qu'il y aura chaque année 300 nouveaux abonnés.
Ainsi, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'abonnés pour l'année $(2014 + n)$.
Pour l'année 2014, il y a 500 abonnés, autrement dit $u_0 = 500$.

1. Pour calculer u_1, on prend 75 % de $u_0 = 500$, ce qui donne 375 et on ajoute 300 ; donc $u_1 = 675$.
   Pour calculer u_2, on prend 75 % de $u_1 = 675$, ce qui donne 506,25 et on ajoute 300, ce qui fait $806,25$; on arrondit à l'entier : $u_2 = 806$.
2. Prendre 75 % d'une somme, c'est multiplier par 0,75 ; de plus, chaque année il y a 300 abonnés de plus. Donc on passe du nombre d'abonnés d'une année au nombre d'abonnés de l'année suivante en multipliant par 0,75 et en ajoutant 300 : pour tout entier naturel n,
   $u_{n+1} = 0,75\,u_n + 300$.
3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1200$; donc $u_n = v_n + 1200$.

a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 1200 = 0,75\,u_n + 300 - 1200 = 0,75(v_n + 1200) - 900 = 0,75\,u_n + 900 - 900$
$= 0,75\,v_n$

$v_0 = u_0 - 1200 = 500 - 1200 = -700$

Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = -700$ et de raison $q = 0,75$.

b. La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = -700$ et de raison $q = 0,75$ donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = -700 \times 0,75^n$.

Or $u_n = v_n + 1200$ donc, pour tout entier naturel n, $u_n = -700 \times 0,75^n + 1200$

c. $u_{10} = -700 \times 0,75^{10} + 1200 \approx 1161$

$n = 10$ correspond à $2014 + 10 = 2024$; on peut donc estimer qu'il y aura 1 161 abonnés en 2024.

4. On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnements sera supérieur à 1 190.

On propose trois algorithmes :

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
Affecter à n la valeur 0	Affecter à n la valeur 0	Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500	Affecter à U la valeur 500	Affecter à U la valeur 500
Tant que $U \leqslant 1190$	Tant que $U \leqslant 1190$	Tant que $U \leqslant 1190$
Affecter à n la valeur $n+1$	Affecter à U la valeur	Affecter à n la valeur $n+1$
Affecter à U la valeur	$-700 \times 0,75^n + 1200$	Affecter à U la valeur
$-700 \times 0,75^n + 1200$	Affecter à n la valeur $n+1$	$-700 \times 0,75^n + 1200$
Fin Tant que	Fin Tant que	Affecter à n la valeur $n+2014$
Affecter à n la valeur $n+2014$	Affecter à n la valeur $n+2014$	Fin Tant que
Afficher n	Afficher n	Afficher n

- C'est l'algorithme 1 qui permet de répondre au problème.
- Dans l'algorithme 2, il y aura un décalage de l'indice n par rapport à la valeur de U puisqu'on affecte $n+1$ à n après le calcul de U.
- Dans l'algorithme 3, on ajoute 2014 à n à l'intérieur de la boucle et on va donc avoir successivement $n = 0$ (initialisation), $n = 1$ (entrée la 1re fois dans la boucle), $n = 2015$ (sortie de la 1re boucle), puis $n = 2016$, $n = 4030$ et on sort de la boucle avec affichage de $n = 4030$ qui n'est pas la bonne réponse.

EXERCICE 3 — Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

Dans une société d'assurance, les clients peuvent choisir de payer leur cotisation chaque mois (paiement mensuel) ou en une fois (paiement annuel).
On constate que 30 % de ceux qui paient en une fois choisissent le paiement mensuel l'année suivante, alors que 85 % de ceux qui paient chaque mois conservent ce mode de paiement l'année suivante.
En 2014, 60 % des clients paient en une fois et 40 % paient mensuellement.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un nombre entier naturel.

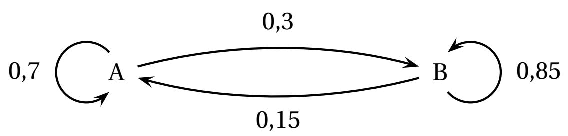
On note :

- a_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie en une fois pour l'année $2014+n$;
- b_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie mensuellement pour l'année $2014+n$.

Comme il n'y a que deux possibilités, on peut dire que, pour tout entier naturel n, $a_n+b_n=1$.
On a $a_0=0,6$ et $b_0=0,4$ et on note P_n l'état probabiliste pour l'année $2014+n$. Ainsi $P_0=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}$.
On note :

- A l'état « le client paie en une fois » ;
- B l'état « le client paie mensuellement ».

1. On représente la situation au moyen d'un graphe probabiliste de sommets A et B :



2. D'après le texte, on a, pour tout entier naturel n :
$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,7\,a_n+0,15\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0,3\,a_n+0,85\,b_n\end{array}\right.$ autrement dit : $\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\ 0,15 & 0,85\end{pmatrix}$

Donc la matrice de transition associée à ce graphe est : $M=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\ 0,15 & 0,85\end{pmatrix}$

3. L'année 2018 correspond à $n=4$; on cherche a_4 que l'on va obtenir en calculant P_4.
D'après le cours, on peut dire que, pour tout n : $P_n=P_0\times M^n$.
Donc $P_4=P_0\times M^4$ et on trouve à la calculatrice $P_4=\begin{pmatrix}0,357\,735 & 0,642\,265\end{pmatrix}$
La probabilité qu'un client paie en une fois durant l'année 2018 est donc $0,358$ (valeur arrondie au millième).

4. L'état stable $\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ est solution du système S : $\left\{\begin{array}{rcl}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times M\\ a+b & = & 1\end{array}\right.$

$$\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times M \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0,7\,a+0,15\,b\\ b & = & 0,3\,a+0,85\,b\end{array}\right. \iff 0,3\,a-0,15\,b=0 \iff 2\,a=b$$

$$S \iff \left\{\begin{array}{rcl}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times M\\ a+b & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\,a & = & b\\ a+b & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{1}{3}\\ b & = & \dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Donc l'état stable est $P=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$.

Cela veut dire que, sur le long terme, il y aura $\dfrac{1}{3}$ des clients qui paieront en une fois et $\dfrac{2}{3}$ qui paieront mensuellement.

5. D'après les questions précédentes :

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1}=0,7\,a_n+0,15\,b_n\\ a_n+b_n=1\end{array}\right\} \Longrightarrow a_{n+1}=0,7\,a_n+0,15\,(1-a_n) \Longrightarrow a_{n+1}=0,7\,a_n+0,15-0,15\,a_n$$

$$\Longrightarrow a_{n+1}=0,55\,a_n+0,15$$

Donc, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0,55\,a_n+0,15$.

6. On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $a_n<0,333\,4$.

a. On écrit un algorithme permettant de déterminer cet entier n :

Variables	A est un réel n est un entier
Initialisation	A prend la valeur 0,6 n prend la valeur 0

Traitement	Tant que $A \geqslant 0,3334$
	    n prend la valeur $n+1$
	    A prend la valeur $0,55 \times A + 0,15$
	Fin de Tant que

Sortie	Afficher n

b. On admet que pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{4}{15} \times 0,55^n + \dfrac{1}{3}$

On cherche par le calcul la valeur de n :

$$\begin{aligned}
a_n < 0,3334 &\iff \frac{4}{15} \times 0,55^n + \frac{1}{3} < 0,3334\\
&\iff \frac{4}{15} \times 0,55^n < 0,3334 - \frac{1}{3}\\
&\iff 0,55^n < \frac{15}{4}\left(0,3334 - \frac{1}{3}\right)\\
&\iff \ln\left(0,55^n\right) < \ln\left(\frac{15}{4}\left(0,3334 - \frac{1}{3}\right)\right) \quad \text{croissance de la fonction ln}\\
&\iff n\ln(0,55) < \ln\left(\frac{15}{4}\left(0,3334 - \frac{1}{3}\right)\right) \quad \text{propriété de la fonction ln}\\
&\iff n > \frac{\ln\left(\frac{15}{4}\left(0,3334 - \frac{1}{3}\right)\right)}{\ln(0,55)} \quad \text{car } \ln(0,55) < 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{15}{4}\left(0,3334 - \frac{1}{3}\right)\right)}{\ln(0,55)} \approx 13,9$ donc le plus petit entier n tel que $a_n < 0,3334$ est 14.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 3 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2\ln(x)$ sur $[0,2\,;\,10]$ et on note $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. La fonction f est dérivable sur $[0,2\,;\,10]$ comme produit de fonctions dérivables et :
$f'(x) = 4x \times \ln(x) + 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = 4x\ln(x) + 2x = 2x(2\ln(x) + 1)$
2. Soit a un réel de $[0,2\,;\,10]$.
Une équation de la tangente T à la courbe (C_f) au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
$f(a) = 2a^2\ln(a)$ et $f'(a) = 2a(2\ln(a)+1)$; donc T a pour équation :
$y = 2a(2\ln(a)+1)(x-a) + 2a^2\ln(a) \iff y = 2a(2\ln(a)+1)x - 2a(2\ln(a)+1) \times a + 2a^2\ln(a) \iff$
$y = 2a(2\ln(a)+1)x - 4a^2\ln(a) - 2a^2 + 2a^2\ln(a) \iff y = 2a(2\ln(a)+1)x - 2a^2(\ln(a)+1)$
3. La droite T passe par l'origine si et seulement si le réel a est tel que $-2a^2(\ln(a)+1) = 0$.
Or $a \in [0,2\,;\,10]$ donc $a \neq 0$; il faut donc que $\ln(a) + 1 = 0 \iff \ln(a) = -1 \iff a = \mathrm{e}^{-1}$
L'unique valeur a de $[0,2\,;\,10]$ pour laquelle la tangente à (C_f) au point d'abscisse a passe par l'origine est $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
L'équation réduite de la tangente est alors : $y = 2\dfrac{1}{\mathrm{e}}(-2+1)x$ soit $y = -\dfrac{2}{\mathrm{e}}x$