∽ Corrigé du baccalauréat Terminale ES/L ∾
Métropole - La Réunion – 13 septembre 2019

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

En 2018, la France comptait environ 225 000 médecins actifs. On prévoit que chaque année, 4 % des médecins cessent leur activité tandis que 8 000 nouveaux médecins s'installent.
Pour étudier l'évolution du nombre de médecins en activité dans les années à venir, on modélise la situation par une suite (u_n). Pour tout entier naturel n, le terme u_n représente le nombre de médecins en $2018+n$, exprimé en millier.

1. $u_0 = 225$ et $u_1 = 225 - 255 \times \dfrac{4}{100} + 8 = 224$.

2. Baisser de 4 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{4}{100} = 0{,}96$.
On passe donc du nombre de médecins l'année n au nombre de médecins l'année $n+1$ en multipliant par 0,96 puis en rajoutant 8 ; donc, pour tout n, $u_{n+1} = 0{,}96u_n + 8$.

3. On complète l'algorithme suivant afin qu'il calcule, selon cette modélisation, le nombre de médecins que compterait la France en 2031 ; $2031 = 2018+13$ donc on cherche u_{13}.

```
U ← 225
Pour N allant de 1 à 13
        U ← 0,96 × U + 8
Fin Pour
```

4. On considère la suite (v_n) définie par, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 200$.
On a donc pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 200$.

a.
- $v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0{,}96u_n + 8 - 200 = 0{,}96\,(v_n + 200) - 192 = 0{,}96v_n + 192 - 192 = 0{,}96v_n$
- $v_0 = u_0 - 200 = 225 - 200 = 25$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}96$ et de premier terme $v_0 = 25$.

b. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 25 \times 0{,}96^n$.

c. Comme $u_n = v_n + 200$, on en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n = 25 \times 0{,}96^n + 200$.

5. On admet que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = -0{,}96^n$.

a. En déduire le sens de variation de la suite (u_n). Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = -0{,}96^n$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

b. Comme la suite (u_n) est décroissante, le nombre de médecins diminue chaque année.

6. a. On résout dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $25 \times 0{,}96^n + 200 < 210$:

$$25 \times 0{,}96^n + 200 < 210 \iff 25 \times 0{,}96^n < 10 \iff 0{,}96^n < 0{,}4 \iff \ln\left(0{,}96^n\right) < \ln(0{,}4)$$
$$\iff n \times \ln(0{,}96) < \ln(0{,}4) \iff n > \dfrac{\ln(0{,}4)}{< \ln(0{,}96)}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}4)}{< \ln(0{,}96)} \approx 22{,}4$ et n est entier donc $n \geqslant 23$.

b. C'est donc à partir de l'année $2018+23$ soit 2041 que le nombre de médecins passera en dessous de 210 000.

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. Un laboratoire reçoit un lot de prélèvements sanguins et réalise des analyses sur ce lot. On choisit un prélèvement au hasard et on note X la variable aléatoire égale au taux d'hémoglobine dans ce prélèvement. On admet que X suit une loi normale d'espérance $\mu = 12$.

Affirmation A : $P(X > 14) = P(X < 11)$

Si X suit une loi normale d'espérance μ, pour des raisons de symétrie, on a
$P(X > \mu + a) = P(X < \mu - a)$ où a désigne un réel inférieur à μ.
$P(X > 14) = P(X > 12+2) = P(X < 12-2) = P(X < 10) < P(X < 11)$
Affirmation A fausse

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\,\text{e}^{-0,3x} + 1$.

Affirmation B : La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ est égale à 3,6, arrondie au dixième.

Une primitive F de la fonction f sur $[0\,;\,5]$ est définie par $F(x) = 5\dfrac{\text{e}^{-0,3x}}{-0,3} + x$.
$F(5) = 5 - \dfrac{5}{0,3}\,\text{e}^{-1,5}$ et $F(0) = 0 - \dfrac{5}{0,3}\,\text{e}^{0} = -\dfrac{5}{0,3}$
La valeur moyenne de f sur $[0\,;\,5]$ est
$m = \dfrac{1}{5-0}\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\text{d}x = \dfrac{1}{5}\left[F(5) - F(0)\right] = \dfrac{1}{5}\left[\left(5 - \dfrac{5}{0,3}\,\text{e}^{-1,5}\right) - \left(-\dfrac{5}{0,3}\right)\right] \approx 3,6$
Affirmation B vraie

3. Un comité d'entreprise souhaite mettre à disposition des salariés une salle de sport. Son directeur affirme qu'un tiers des employés serait intéressé par une telle salle. On réalise un sondage dans lequel on interroge 180 employés au hasard, parmi lesquels 72 se déclarent intéressés.

Affirmation C : Ce sondage remet en question l'affirmation du directeur.

On va tester l'hypothèse $p = \dfrac{1}{3}$ sur un échantillon de taille $n = 180$.
$n = 180 \geqslant 30$, $np = 60 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 120 \geqslant 5$ donc on peut utikiser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

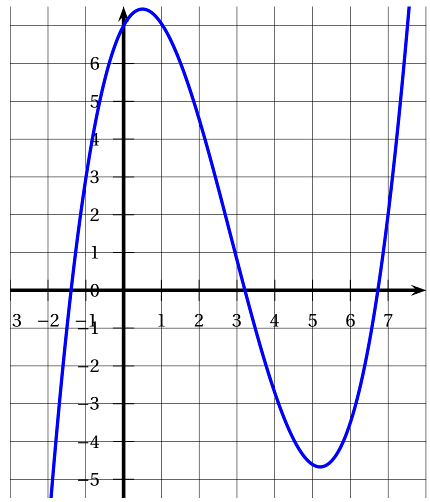
$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\;;\; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{1}{3} - 1,96\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}}{\sqrt{180}}\;;\;\frac{1}{3} + 1,96\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}}{\sqrt{180}}\right]$$
$$\approx [0,264\;;\;0,402]$$

La proportion dans l'échantillon est $f = \dfrac{72}{180} = 0,4$; or $f \in I$ donc il n'y a pas de raison de remettre en question l'affirmation du directeur.
Affirmation C fausse

4. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Affirmation D : La fonction F est convexe sur $[1~;~3]$.



> La convexité d'une fonction dépend du sens de variation de sa dérivée, donc la convexité de la fonction F dépend du sens de variation de sa dérivée $F' = f$.
> Sur l'intervalle $[1~;~3]$, la fonction f est décroissante donc la fonction F est concave sur cet intervalle.
>
> **Affirmation D fausse**

5. Soit f la fonction définie sur $[0~;~1]$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$.
Affirmation E : f est une fonction de densité sur $[0~;~1]$.

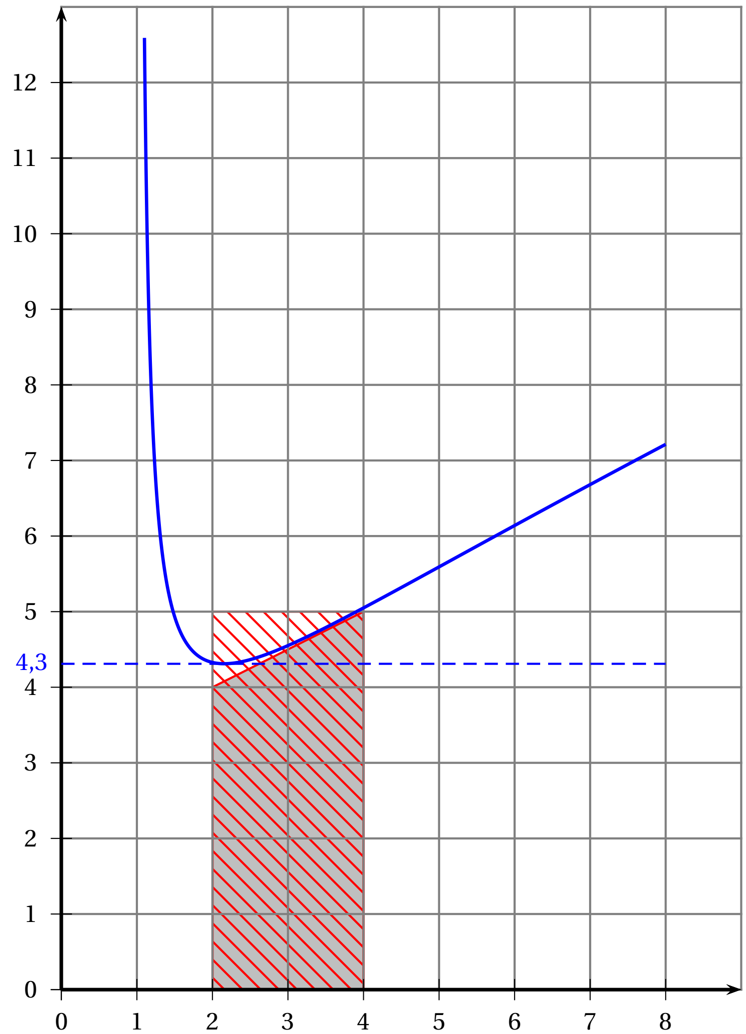
> On se place sur l'intervalle $[0~;~1]$.
>
> - On cherche le signe du trinôme $3x^2 - 4x + 2$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 2 = -8 < 0$ donc $3x^2 - 4x + 2 > 0$. La fonction f est donc positive sur $[0~;~1]$.
> - On cherche l'aire sous la courbe entre 0 et 1.
>   La fonction F définie par $F(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$ est une primitive de f.
> $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = (1 - 2 + 2) - (0) = 1$
>
> Donc la fonction f est une fonction de densité sur $[0~;~1]$.
>
> **Affirmation E vraie**

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[1{,}1~;~8]$.

Partie A : étude graphique

1. Une valeur approchée du minimum de la fonction f sur l'intervalle $[1{,}1~;~8]$ est 4,3 (voir graphique).
2. Sur l'intervalle $[4~;~6]$, la fonction f est croissante donc $f'(5) > 0$.
3. $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire de la région délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, les deux droites verticales d'équations $x = 2$ et $x = 4$. D'après le graphique $9 \leqslant \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 10$.



4. Sur l'intervalle $[1,1\ ;\ 3]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes donc la fonction f est convexe sur $[1,1\ ;\ 3]$.

Partie B : étude analytique

On admet que f est la fonction définie sur l'intervalle $[1,1\ ;\ 8]$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{\ln(x)}$.

1. La fonction f est quotient de deux fonctions dérivables sur $[1,1\ ;\ 8]$ donc est dérivable sur $[1,1\ ;\ 8]$:

$$f'(x) = \dfrac{2 \times \ln(x) - (2x-1) \times \dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{2\ln(x) - 2 + \dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

2. Soit h la fonction définie sur $[1,1 ; 8]$ par : $h(x) = 2\ln(x) - 2 + \dfrac{1}{x}$.

a. Soit h' la fonction dérivée de h sur l'intervalle $[1,1;8]$.
La fonction h est la somme de fonctions dérivables sur $[1,1\ ;\ 8]$ donc est dérivable sur $[1,1\ ;\ 8]$:
$h'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x-1}{x^2}$

b. Sur $[1,1\ ;\ 8]$ on a $x^2 > 0$ et $2x - 1 > 0$, donc $h'(x) > 0$.
La fonction h est donc strictement croissante sur $[1,1\ ;\ 8]$.

c. • $h(2) \approx -0{,}114 < 0$ donc, comme h est strictement croissante sur $[1{,}1 ; 8]$, si $x < 2$ alors $h(x) < 0$.

• $h(3) \approx 0{,}53 > 0$ donc si $x > 3$, alors $h(x) > 0$.

• Entre 2 et 3, la fonction h est continue car dérivable, et passe d'une valeur négative à une valeur positive ; d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1{,}1 ; 8]$.

L'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1{,}1 ; 8]$ et $2 < \alpha < 3$.

3. On en déduit que $h(x) < 0$ sur $[1{,}1 ; \alpha[$, que $h(\alpha) = 0$ et que $h(x) > 0$ sur $]\alpha ; 8]$.

4. $f'(x) = \dfrac{2\ln(x) - 2 + \dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{h(x)}{(\ln(x))^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $h(x)$.

On en déduit que :

- $f'(x) < 0$ sur $[1{,}1 ; \alpha[$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[1{,}1 ; \alpha]$;
- $f'(x) > 0$ sur $]\alpha ; 8]$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[\alpha ; 8]$;
- la fonction f admet un minimum en $x = \alpha$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité ou candidats de L

Partie A

Pour mieux cerner le profil de ses clients, une banque réalise un sondage qui permet d'établir que :

— 53 % de ses clients ont plus de 50 ans ;

— 32 % de ses clients sont intéressés par des placements dits *risqués* ;

— 25 % de ses clients de plus de 50 ans sont intéressés par des placements dits *risqués*.

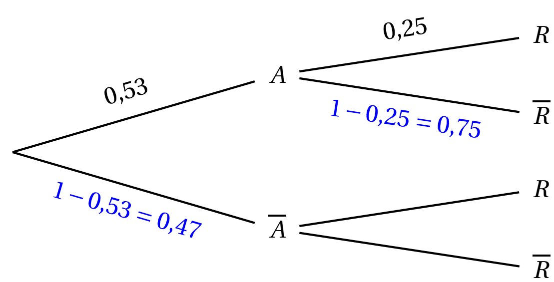
On choisit au hasard un client de cette banque et on considère les évènements suivants :

— A : « Le client a plus de 50 ans » ;

— R : « Le client est intéressé par des placements dits risqués ».

1. D'après le texte, $P(R) = 0{,}32$ et $P_A(R) = 0{,}25$.

2. On représente la situation par un arbre pondéré :



3. L'évènement « le client ait plus de 50 ans et est intéressé par des placements dits risqués » est $A \cap R$.
$P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = 0{,}53 \times 0{,}25 = 0{,}1325$.

4. Sachant que le client est intéressé par des placements dits risqués, la probabilité qu'il ait plus de 50 ans est $P_R(A) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}1325}{0{,}32} \approx 0{,}414$.

5. D'après la formule des probabilités totales, $P(R) = P(A \cap R) + P\left(\overline{A} \cap R\right)$ donc

$P\left(\overline{A} \cap R\right) = P(R) - P(A \cap R) = 0{,}32 - 0{,}1325 = 0{,}1875$.

On en déduit que $P_{\overline{A}}(R) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap R\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{0{,}1875}{0{,}47} \approx 0{,}399$.

Cela signifie :

- qu'il y a 18,75 % de clients qui ont moins de 50 ans et qui sont intéressés par des placements dits risqués ;
- que parmi les clients de moins de 50 ans, il y en a environ 39,9 % qui sont intéressés par des placements dits risqués.

Partie B

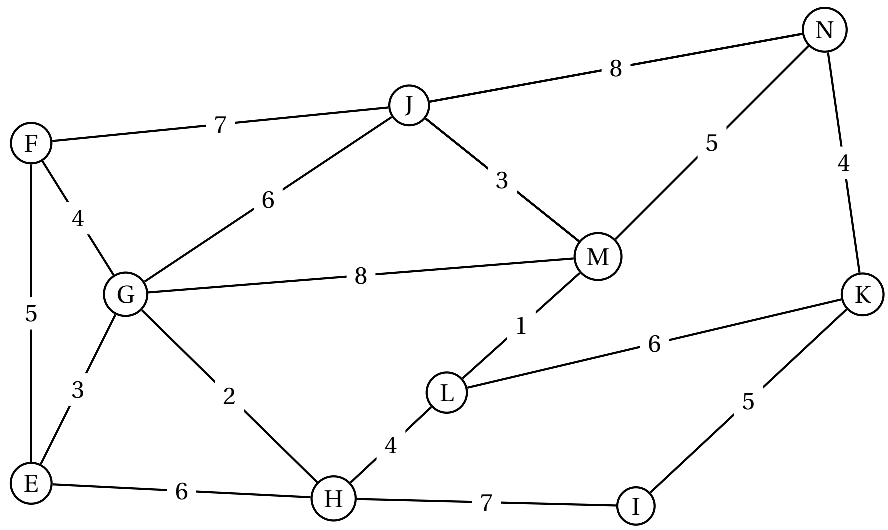
L'une des agences de cette banque charge ses conseillers de proposer un placement dit *risqué*, R_1 à tous ses clients.
Elle promet à ses conseillers une prime de 150 € s'ils convainquent au moins 10 clients d'effectuer ce placement en un mois et une prime supplémentaire de 150 € s'ils convainquent au moins 15 clients d'effectuer ce placement en un mois.
L'une des conseillères de cette banque, Camille, reçoit 45 clients ce mois-ci.

1. On admet que la probabilité que Camille réussisse à placer ce produit auprès de l'un de ses clients est de 0,23 et que la décision d'un client est indépendante de celles des autres clients.
La variable aléatoire X qui donne le nombre de clients convaincus par Camille suit la loi binomiale de paramètres $n = 45$ et $p = 0{,}23$.
   a. La probabilité que Camille place le produit R_1 auprès de 10 clients exactement ce mois-ci est $P(X = 10) = \dbinom{45}{10} \times 0{,}23^{10} \times (1 - 0{,}23)^{45-10} \approx 0{,}141$.
   b. Camille a 300 € de prime si elle vend au moins 15 produits aux 45 clients ; la probabilité de cet évènement est $P(X \geqslant 15) = 1 - P(X \leqslant 14) \approx 0{,}075$.
   c. Camille a exactement 150 € de prime si elle place plus de 10 produits et moins de 15 ; la probabilité de cet évènement est $P(10 \leqslant X < 15) = P(10 \leqslant X \leqslant 14) \approx 0{,}532$.
2. Le placement R_1 a rapporté 30 % d'intérêt sur les 5 dernières années. Le taux d'intérêt annuel moyen t du placement R_1 sur ces 5 dernières années vérifie l'égalité $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5 = 1 + \dfrac{30}{100}$.
On a donc $1 + \dfrac{t}{100} = \left(1 + \dfrac{30}{100}\right)^{\frac{1}{5}}$ et donc $\dfrac{t}{100} = \left(1 + \dfrac{30}{100}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$ ou encore $t = 100 \times \left[\left(1 + \dfrac{30}{100}\right)^{\frac{1}{5}} - 1\right]$.
Le taux d'intérêt annuel moyen est d'environ 5,39 %.

Exercice 4 **5 points**
Candidats de ES ayant suivi la spécialité

Deux amis, Louisa et Antoine, passent la journée dans un parc d'attraction.

Le plan du parc est donné par le graphe Γ ci-dessous. Les arêtes de ce graphe représentent les allées du parc et les sommets correspondent aux intersections de ces allées. On a pondéré les arêtes de ce graphe par les temps de parcours en minutes.



1. Le chemin F – E – G – J – N – M – L – H – I – K passe par tous les sommets du graphe Γ donc deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaine ; le graphe Γ est donc connexe.

2. Antoine prétend avoir trouvé un itinéraire permettant d'emprunter chaque allée une et une seule fois mais Louisa lui répond que c'est impossible.

Pour trouver un itinéraire permettant d'emprunter chaque allée une et une seule fois, il faudrait, d'après le théorème d'Euler, qu'il y ait 0 ou 2 sommets de degrés impairs. Or il y a 6 sommets de degrés impairs, F, E, G, L, N, K, donc un tel itinéraire n'est pas possible ; Louisa a raison.

3. On considère la matrice M ci-dessous (a, b et c sont des entiers).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Les sommets dans l'ordre alphabétique sont E - F - G - H - I - J - K - L - M - N ; le nombre a se trouve sur la 1$^{\text{re}}$ ligne, correspondant au commet E, et sur la 5$^{\text{e}}$ colonne, correspondant au sommet I, donc ce nombre donne le nombre d'arêtes reliant E et I : d'après le graphe, $a = 0$.

Le nombre b se trouve sur la 7$^{\text{e}}$ ligne, correspondant au commet K, et sur la 5$^{\text{e}}$ colonne, correspondant au sommet I, donc ce nombre donne le nombre d'arêtes reliant K et I : d'après le graphe, $b = 1$.

Le nombre c se trouve sur la 5$^{\text{e}}$ ligne, correspondant au commet I, et sur la 7$^{\text{e}}$ colonne, correspondant au sommet K, donc ce nombre donne le nombre d'arêtes reliant I et K : d'après le graphe, $c = 1$.

On aurait également pu dire que, comme le graphe n'est pas orienté, sa matrice d'adjacence est symétrique par rapport à la 1$^{\text{re}}$ diagonale, donc $a = 0$ et $c = b$.

Soit S la matrice définie par : $S = M + M^2 + M^3$. On admet que :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 7 & 1 & 4 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 3 & 2 & 8 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 8 & 9 & 8 & 10 & 1 & 10 & 5 & 2 & 11 & 3 \\ 7 & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & 0 & 8 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 6 & 0 & 2 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 10 & 5 & 2 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 5 & 2 & 0 & 7 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 & 0 & 4 & 7 & 0 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & 11 & 2 & 4 & 8 & 1 & 8 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 0 & 7 & 6 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 & 9 & 2 & 6 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 9 & 7 & 12 & 5 & 2 & 10 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ 11 & 12 & 13 & 12 & 2 & 13 & 5 & 4 & 13 & 5 \\ 9 & 5 & 12 & 6 & 7 & 6 & 2 & 9 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 2 & 2 & 6 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 10 & 13 & 6 & 2 & 10 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 3 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 9 & 2 & 5 & 8 & 3 & 9 & 3 \\ 6 & 6 & 13 & 4 & 4 & 11 & 3 & 9 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 1 & 9 & 7 & 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

b. Le nombre de chemins de longueur 3 reliant un sommet à un autre est donné par la matrice M^3. Le sommet F est le 2e, le sommet L est le 8e donc le nombre de chemins reliant F et L est le coefficient de la matrice M^3 situé sur la 2e ligne et la 8e colonne : c'est 4.

Les chemins sont : F - E - H - L; F - J - M - L; F - E - M - L et F - G - H - L.

c. Les nombres de chemins de longueur 3 partant de E sont situés sur la ligne 1 de la matrice M^3 ; il y en a en tout : $4+7+8+7+1+4+2+2+5+3 = 43$.

d. $S = M + M^2 + M^3$ donc les coefficients de la matrice S donnent le nombre de chemins de longueur 1, 2 ou 3, reliant deux sommets du graphe.

Le coefficient à l'intersection de la première ligne (sommet E) et de la troisième colonne (sommet G) de S est 11; donc il y a 11 chemins de longueurs 1, 2 ou 3, reliant E et G.

4. Un défilé part tous les jours à 14 h du sommet N. Louisa et Antoine choisissent de déjeuner dans un restaurant situé au sommet E avant d'aller admirer le défilé.

a. À l'aide de l'algorithme de Dijskstra, on va déterminer le chemin que doivent emprunter Louisa et Antoine pour se rendre du restaurant au départ du défilé le plus rapidement :

E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	E
	$\cancel{\infty}$ 5 E	$\cancel{\infty}$ 3 E	$\cancel{\infty}$ 6 E	∞	∞	∞	∞	∞	∞	G (3)
	5 E ~~7 G~~		~~6 E~~ 5 G	∞	$\cancel{\infty}$ 9 G	∞	∞	$\cancel{\infty}$ 11 G	∞	F (5)
			5 G	∞	9 G ~~12 F~~	∞	∞	11 G	∞	H (5)
				$\cancel{\infty}$ 12 H	9 G	∞	$\cancel{\infty}$ 9 H	11 G	∞	J (9)
				12 H		∞	9 H	11 G ~~12 J~~	$\cancel{\infty}$ 17 J	L (9)
				12 H		$\cancel{\infty}$ 15 L		~~11 G~~ 10 L	17 J	M (10)
				12 H		15 L			~~17 J~~ 15 M	I (12)
						15 L ~~17 I~~			15 M	K (15)
									15 M ~~19 K~~	N (15)

Le trajet le plus rapide est : $\text{E} \xrightarrow{3} \text{G} \xrightarrow{2} \text{H} \xrightarrow{4} \text{L} \xrightarrow{1} \text{M} \xrightarrow{5} \text{N}$; sa durée est de 15 minutes.

b. Le trajet le plus court dure 15 minutes, donc Louisa et Antoine doivent partir au plus tard à 13 h 45 de E pour être à 14 h au défilé.