Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES/L Métropole–La Réunion 21 juin 2018

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

La variable X suit la loi normale de paramètres $\mu = 45$ et $\sigma = 12$.

1. **a.** $P(X = 10) = 0$ car X suite une loi à densité, donc la probabilité (calculée avec une intégrale) que la variable X soit égale à une n'importe quelle valeur choisie, est toujours égale à zéro.

   b. L'espérance de la loi normale est $\mu = 45$. La fonction de densité d'une telle loi est symétrique par rapport à un axe vertical d'équation $x = 45$. Donc $P(X \leqslant 45) = p(X \geqslant 45) = 0,5$.

   c. $\mu = 45$ et $\sigma = 12$ donc $\mu - 2\sigma = 21$ et $\mu + 2\sigma = 69$.
   Donc $P(21 \leqslant X \leqslant 69) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,955$

   d. En utilisant toujours la symétrie de la fonction de densité, on a donc :
   $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 2 \times P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu) = \dfrac{0,955}{2} = 0,475$.

2. Á l'aide de la calculatrice, $P(30 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0,789$.

3. Á l'aide de la calculatrice (inversion de la loi normale), $P(X \leqslant a) = 0,30 \iff a \approx 38,71$ soit environ 39 minutes. Donc la probabilité qu'un client passe moins de 39 minutes est égale à 0,30.

Partie B

1. On prend un échantillon de taille 300 donc $n = 300$. Une étude a montré que 89 % des clients sont satisfaits donc la probabilité est $p = 0,89$.
   $n = 300 \geqslant 30$, $np = 267 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 33 \geqslant 5$ donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :
   $$I_{300} = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$
   $$= \left[0,89 - 1,96\sqrt{\frac{0,89 \times 0,11}{300}}\,;\, 0,89 + 1,96\sqrt{\frac{0,89 \times 0,11}{300}}\right] \approx [0,855\,;\, 0,925]$$

2. La fréquence de clients satisfaits est : $f = \dfrac{286}{300} \approx 0,953$

3. Si on suppose que le taux de satisfaction reste stable à que 89 %, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % reste identique. Or $f \notin I_{300}$ donc au risque d'erreur de 5 %, donc on ne peut pas dire que le taux de satisfaction est resté stable.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. La probabilité $p_{\overline{F}}(S)$ est la probabilité que l'on interroge un élève faisant du sport sachant que cet élève n'est pas une fille (et donc est un garçon). **Réponse a)**

2. Formule de Bayes : $P_F(S) = \dfrac{P(F \cap S)}{P(F)} = \dfrac{P_S(F) \times P(S)}{P(F)} = \dfrac{0,3 \times 0,4}{0,47} \approx 0,255$. **Réponse b)**

Partie B

1. L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $a = 1$ est : $y = g'(a)(x - a) + g(a)$.
   La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[-1;4]$: $g'(x) = -3x^2 + 6x$.
   Donc $g'(1) = 3$ et $g(1) = 1$. L'équation de la tangente est : $y = 3(x-1)+1 = 3x-2$. **Réponse b)**
2. Avec la calculatrice, on calcule la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[-1; a]$ $(a \geqslant -1)$: $\dfrac{1}{a-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x$.
   Pour $a = 0$: $\dfrac{1}{0-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}$.
   Pour $a = 1$: $\dfrac{1}{1-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. **Réponse b)**

Exercice 3 **5 points**
Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

1. Le niveau augmente en hauteur de 6 % puis baisse de 15 cm d'un jour à l'autre. Augmenter de 6 % revient à multiplier par 1,06.
   a. Le 2 janvier 2018, $u_1 = 1,06 \times u_0 - 15 = 1,06 \times 605 - 15 = 626,3$.
   b. Pour tout entier naturel n, on note respectivement par u_n et u_{n+1} les niveaux du barrage pour les jours n et $n+1$.Le niveau augment de 6 % puis baisse de 15, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,06 \times u_n - 15$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$
   a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 1,06u_n - 15 - 250 = 1,06u_n - 265 = 1,06 \times \left(u_n - \dfrac{265}{1,06}\right)$
   $= 1,06 \times (u_n - 250) = 1,06 \times v_n$.
   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme $v_0 = u_0 - 250 = 355$.
   b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 355 \times 1,06^n$. De plus $u_n = v_n + 250$
   donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 355 \times 1,06^n + 250$.
3. **a.** Cherchons la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini.
   La raison de la suite géométrique (v_n) est supérieure à 1 et $v_0 > 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
   De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 250$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   b. L'équipe d'entretien devra impérativement intervenir car à un moment donné (jour N) $u_N \geqslant 1000$.
4. **a.** Ci-dessous l'algorithme complété :

```
N ← 0
U ← 605
Tant que U < 1000 faire
        U ← 1,06 × U − 15
        N ← N + 1
Fin Tant que
```

   b. À l'aide de la calculatrice, $a_{12} \approx 964,33$ et $a_{13} \approx 1007,19$. A la fin de l'exécution, la variable N contient la valeur 13.
   Par le calcul :
   $u_n \geqslant 1000 \iff 355 \times 1,06^n + 250 \geqslant 1000 \iff 355 \times 1,06^n \geqslant 750 \iff 1,06^n \geqslant \dfrac{750}{355}$

$\iff \ln(1,06^n) \geqslant \ln\left(\dfrac{150}{71}\right) \iff n \times \ln(1,06) \geqslant \ln\left(\dfrac{150}{71}\right) \iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{150}{71}\right)}{\ln(1,06)}$

Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{150}{71}\right)}{\ln(1,06)} \approx 12,84$ donc $n \geqslant 13$. On retrouve le résultat précédent.

c. L'intervention devra donc intervenir 13 jours après le 1er janvier 2018, soit donc le 14 janvier 2018.

Exercice 3 **5 points**

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. L'ordre de ce graphe est 5 car il possède 5 sommets.
2. **a.** La matrice d'adjacence de ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

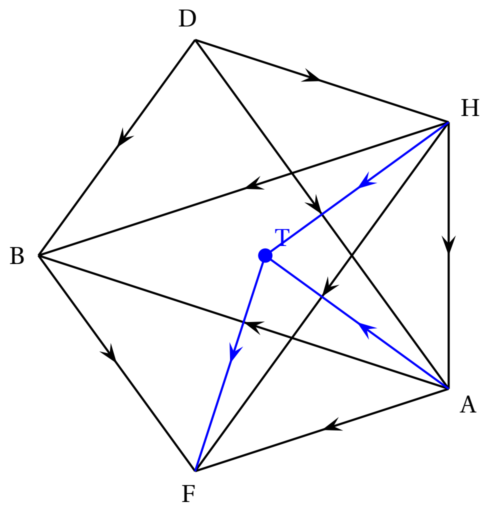
   b. Pour trouver le nombre de chemin de longueur 3 allant de D à F, il faut lire le coefficient $a_{3,4}$ de la matrice $M^3 = (a_{i,j})$: ici c'est 3. Il existe donc trois parcours.
   Ce sont : $D \to H \to A \to F$; $D \to A \to B \to F$ et $D \to H \to B \to F$.
3. En utilisant l'algorithme de Dijkstra :

A	B	D	F	H	Sommet Choisi
28 (D)	40 (D)	0	$+\infty$	19 (D)	H (19)
~~45 (H)~~ 28 (D)	35 (H) ~~40 (D)~~		51 (H)		D (28)
	68 (D) 35 (H)		51 (H)		B (35)
			49 (B) ~~51 (H)~~		F (49)

Le chemin le plus court sera : $D \xrightarrow{19} H \xrightarrow{16} B \xrightarrow{14} F$ et aura pour longueur 49.

Partie B

Le graphe complété des 3 nouveaux chemins :



Exercice 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.
Pour tout $x \in [0\,;\,5]$, $f(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x) + 3$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.
En écrivant $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -2\mathrm{e}^{-0,2x}$,
$f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-2x} + (2x+1) \times -2\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-2x}(2 + (2x+1) \times -2) = \mathrm{e}^{-2x}(2 - 4x - 2) = \mathrm{e}^{-2x}(-4x)$

2. $\forall x \in [-2\,;\,4]$, $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-4x$.
Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ est :

x	-2		0		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-3\mathrm{e}^4 + 3$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$9\mathrm{e}^{-8} + 3$

$f(-2) = (2 \times -2 + 1)\mathrm{e}^{-2\times-2} + 3 = -3\mathrm{e}^4 + 3 \approx -160,8$ $\qquad f(0) = (2 \times 0,6 + 1)\mathrm{e}^0 + 3 = 4$
$f(4) = (2 \times 4)\mathrm{e}^{-2\times4} + 3 = 9\mathrm{e}^{-8} + 3 \approx 3$

3. Sur l'intervalle $[-2\,;\,0]$, la fonction f est continue et strictement croissante.
De plus $0 \in [-3\mathrm{e}^4 + 3\,;\,4]$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[-2\,;\,0]$. À l'aide de la calculatrice, $\alpha \approx -0,8$.
Sur l'intervalle $[0\,;\,4]$, la fonction f est strictement décroissante donc $f(x) \geqslant f(4)$. Or $f(4) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
Pour conclure, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique $\alpha \approx -0,8$ sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.

4. **a.** $\forall x \in [-2\,;\,4]$, $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $8x - 4$.
$8x - 4 \geqslant 0 \iff x \geqslant \dfrac{1}{2}$. Le tableau suivant donne le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$:

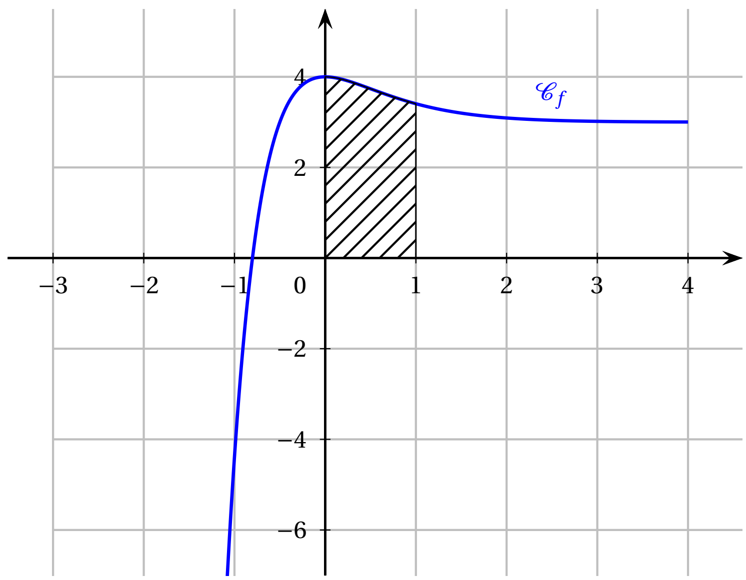
x	-2		$\frac{1}{2}$		4
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

b. D'après le tableau de signe précédent, f est convexe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;4\right]$.

5. **a.** On admet que la fonction G est dérivable sur l'intervalle $[-2\,;4]$.
$\forall x \in [-2\,;4]$, $G(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = -x-1$ et $v(x) = \text{e}^{-2x}$.
En écrivant $u'(x) = -1$ et $v'(x) = -2\text{e}^{-0,2x}$,
$G'(x) = -1 \times \text{e}^{-2x} + (-x-1) \times -2\text{e}^{-x} = \text{e}^{-2x}\,(-1+(-x-1)\times -2) = \text{e}^{-2x}\,(-1+2x+2)$
$G'(x) = \text{e}^{-2x}\,(2x+1)$.
Donc la fonction G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[-2\,;4]$.

b. Une primitive de f sur l'intervalle $[-2\,;4]$ est : $F(x) = G(x) + 3x = (-x-1)\text{e}^{-2x} + 3x$.

6. **a.** Sur le dessin ci-dessous est hachuré $\mathscr{A}$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.



b. Par lecture graphique, dans la limite de sa précision : $3 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 4$

c. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0)$.
$F(1) = (-1-1)\text{e}^{-2} + 3 = -2\text{e}^{-2} + 3$ et $F(0) = -\text{e}^0 = -1$
donc $\mathscr{A} = -2\text{e}^{-2} + 3 + 1 = 4 - 2\text{e}^{-2} \approx 3,73$