Exercice 1 - *commun à tous les candidats* **4 points**

Les justifications n'étaient pas demandées, elles sont données ici à titre indicatif

1. Réponse b

   L'intervalle de confiance $I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec $f = \dfrac{225}{300} = 0{,}75$ et $n = 300$

2. Réponse d

   Si X suit la loi uniforme sur $[4\ ;\ 10]$ alors $P(X \leqslant 10) = P(4 \leqslant X \leqslant 10) = \dfrac{10-4}{11-4} = \dfrac{6}{7}$

3. Réponse d

   $f = u\mathrm{e}^{v} \Longrightarrow f' = u'\mathrm{e}^{v} + uv'\mathrm{e}^{v} = (u' + uv')\mathrm{e}^{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v(x) = -2x+3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -2 \end{cases}$

   donc $f'(x) = (1 - 2(x+1))\mathrm{e}^{-2x+3} = (-2x-1)\mathrm{e}^{-2x+3}$

4. Réponse c

   La courbe donnée de f'' nous indique que $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-2\ ;\ 1]$ et $f'(x) \geqslant 0$ sur $[1\ ;\ 2]$ donc f est concave sur $[-2\ ;\ 1]$ et convexe sur $[1\ ;\ 2]$, elle admet donc un point d'inflexion en $x = 1$

Exercice 2 - *Pour les non spécialistes ES et les spécialistes L* **5 points**

1. Le nombre de véhicules diminue de 25 % chaque année donc il est multiplié par $1 - \dfrac{25}{100} = 0{,}75$ puis on ajoute les 3 000 nouveaux véhicules

   On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}75u_n + 3000$

2. **a.** $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 12000 = 0{,}75u_n + 3000 - 12000 = 0{,}75u_n + -9000 = 0{,}75(u_n - 12000) = 0{,}75v_n$

   donc (v_n) est géométrique de 1^er^ terme $v_0 = u_0 - 12000 = -2000$ et de raison $q = 0{,}75$

   b. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 q^n = -2000 \times 0{,}75^n$

   c. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + 12000 = 12000 - 2000 \times 0{,}75^n$

   d. $-1 < 0{,}75 < 1$ on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^n = 0$

   donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 12000$

   Au bout d'un grand nombre d'année, le parc automobile comportera 12 000 véhicules

3. **a.** l'algorithme est donné ci-dessous

INITIALISATION	U prend la valeur 10 000 N prend la valeur 0
TRAITEMENT	Tant que U<11 950 N prend la valeur $N+1$ U prend la valeur $0{,}75U+3\,000$ Fin Tant que
SORTIE	Afficher N

   b. D'après la calculatrice, $u_{12} \approx 11937 < 11950$ et $u_{13} \approx 11952 > 11950$

   Donc à partir de 2028, le parc comptera au moins 11 950 véhicules

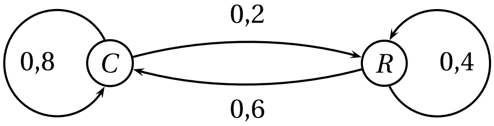
   c. $12000 - 2000 \times 0{,}75^n \geqslant 11950 \Longleftrightarrow 0{,}75^n \leqslant 0{,}025 \Longleftrightarrow n\ln(0{,}75) \leqslant \ln(0{,}025) \Longleftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}025)}{\ln(0{,}75)}$

   or $\dfrac{\ln(0{,}025)}{\ln(0{,}75)} \approx 12{,}8$ donc $n \geqslant 13$

   on retrouve bien le résultat précédent

Exercice 2 - *Pour les spécialistes ES* **5 points**

1. le graphe probabiliste associé est :



2. La matrice transition est :

$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

3. On a $(c_6 \quad r_6) = (c_0 \quad r_0) \times M^6 = (1 \quad 0) \times M^6$
donc $c_6 = 0,750016 \approx 0,75$

4. **a.** $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ P_{n+1} = P_n \times M$

   b. D'après ce qui précède on a

   $(c_{n+1} \quad r_{n+1}) = (c_n \quad r_n) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

   donc $c_{n+1} = 0,8c_n + 0,6r_n$ or $(c_n \quad r_n)$ est un état probabiliste donc $r_n = 1 - c_n$ on en déduit alors $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$

5. **a.** $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_{n+1} = c_{n+1} - 0,75 = 0,2c_n + 0,6 - 0,75 = 0,2c_n - 0,15 = 0,2\,(c_n - 0,75) = 0,2\,v_n$
   donc (v_n) est géométrique de raison $q = 0,2$ et de 1[er] terme $v_0 = c_0 - 0,75 = 0,25$

   b. $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = v_0 \times q^n = 0,25 \times 0,2^n$

   $-1 < 0,2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

   c. $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = c_n - 0,75 \iff c_n = 0,75 + v_n$
   on a bien $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$

   d. le 29 décembre 2014 est le 363[ème] jour de l'année or $2^{363} \approx 0$ donc on peut estimer que $c_{363} = 0,75$
   Donc la probabilité qu'Hugo court le 29 décembre 2014 est d'environ 0,75

   e. L'état stable semble être $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

   <u>Validation</u> : $PM = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = P$

   donc $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ est bien l'état stable de ce graphe

Exercice 3 - *commun à tous les candidats* **5 points**

Partie A

1. $P(R) = \dfrac{960}{3\,200} = 0,3$ car on se trouve dans une situation d'équiprobabilité et qu'il y a 960 chansons rock parmi les 3 200 du répertoire.

2. On a donc $P_R(F) = 0,35$

3. $P(R \cap F) = P_R(F) \times P(R) = 0,35 \times 0,3 = 0,105$

4. On a $P(F) = 0,385$ or R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a $P(F) = P(R \cap F) + P\left(\overline{R} \cap F\right)$

   On a donc $P\left(\overline{R} \cap F\right) = P(F) - P(R \cap F) = 0,385 - 0,105 = 0,28$

5. $P_{\overline{R}}(F) = \dfrac{P\left(\overline{R} \cap F\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \dfrac{0{,}28}{0{,}7} = 0{,}4$

   On en déduit que 40% des chansons autres que la catégorie rock sont chantées en français

Partie B

1. $P(15 \leqslant X \leqslant 45) \approx 0{,}866$
2. $P(X \geqslant 60) \approx 0{,}001$

Exercice 4 - *commun à tous les candidats* **6 points**

Partie A

1. $f'(1{,}5) = 0$ car en B d'abscisse 1,5 la tangente à (C) est horizontale
2. Le coefficient directeur de la tangente est 1 donc elle est d'équation $y = x + b$ or $A(0\,;\,2)$ est sur cette tangente donc on a $b = 2$.
   Finalement la tangente à (C) en A a pour équation $y = x + 2$.
3. La fonction est positive sur $[1\,;\,2]$ donc l'aire cherchée est donnée par $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

   on a $3 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 4$
4. Sur $[0{,}5\,;\,6]$ la dérivée de f semble décroissante, on en déduit que f est concave sur $[0{,}5\,;\,6]$

Partie B

1. f est une somme de fonctions dérivables sur $[0{,}5\,;\,6]$ donc elle est dérivable sur cet intervalle

   $\forall x \in [0{,}5\,;\,6]$, $f'(x) = -2 + \dfrac{3}{x} = \dfrac{-2x+3}{x}$
2. Sur $[0{,}5\,;\,6]$,$x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x + 3$
   on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0,5		1,5		6
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

   On a $f(0{,}5) \approx 1{,}92$, $f(1{,}5) \approx 3{,}22$ et $f(6) \approx -1{,}63$
3. Sur $[0{,}5\,;\,1{,}5]$, $f(x)$ admet $f(0{,}5) \approx 1{,}92 > 0$ pour minimum donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
   Sur $[1{,}5\,;\,6]$, f est continue et strictement décroissante à valeurs dans $\left[f(6)\,;\,f(1{,}5)\right]$ or $0 \in \left[f(6)\,;\,f(1{,}5)\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,
   l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1{,}5\,;\,6]$ donc sur $[0{,}5\,;\,6]$

   Par balayage on obtient $\alpha \approx 4{,}88$
4. On en déduit le signe de $f(x)$

x	0,5		α		6
$f(x)$		+	0	-	

5. **a.** F est dérivable sur $[0,5~;~6]$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $[0,5~;~6]$

$F = u+3v\ln(v) \Longrightarrow F' = u'+3\ln(v)+3v\dfrac{v'}{v} = u'+3\left(v'+\ln(v)\right)$ avec $\begin{cases} u(x) = -x^2+2x \\ v(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = -2x+2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

donc $\forall x \in [0,5~;~6]$, $F'(x) = -2x+2+3(1+\ln(x)) = -2x+5+3\ln(x) = f(x)$

F est donc bien une primitive de f sur $[0,5~;~6]$

b. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_1^2 = F(2)-F(1) = 6\ln(2)-1 \approx 3,2$ u.a.