Corrigé du baccalauréat ES (spécialité) Antilles–Guyane septembre 2016

EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats** **6 points**

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$; la fonction f est :

a. concave sur $]-\infty~;~0]$ **b.** convexe sur $]-\infty~;~0]$

c. concave sur $[0~;~+\infty]$ **d.** $\boxed{\text{convexe sur } [0~;~+\infty[}$

$f'(x) = \mathrm{e}^{x} + x\,\mathrm{e}^{x}$ et $f''(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x} + x\,\mathrm{e}^{x} = (2+x)\,\mathrm{e}^{x}$

$f'' > 0$ sur $]-2~;~+\infty`[$ donc sur $[0~;~+\infty[$, donc f est convexe sur $[0~;~+\infty[$.

2. On considère l'équation d'inconnue x : $(3x+1)\mathrm{e}^{5x} = 0$.

Cette équation admet sur $\mathbf{R}$:

a. 0 solution **b.** $\boxed{\text{1 solution}}$ **c.** 2 solutions **d.** plus de 3 solutions

$\mathrm{e}^{5x} > 0$ pour tout x, donc l'unique solution est $-\dfrac{1}{3}$.

3. On a constaté que, sur 10 ans, le prix d'une certaine denrée a augmenté de 8 % par an.

On peut affirmer que, sur 10 ans, le prix de cette denrée a augmenté, à l'unité près, de :

a. 80 % **b.** $\boxed{116\,\%}$ **c.** 216 % **d.** 43 %

Augmenter de 8 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{8}{100} = 1,08$; augmenter de 8 % pendant 10 ans, c'est multiplier par $1,08^{10} \approx 2,16$; $2,16 = 1 + \dfrac{116}{100}$ qui correspond à une augmentation de 116 %.

4. La courbe $\mathscr{C}_g$ ci-contre représente une fonction g définie et dérivable sur $[0~;~3]$.

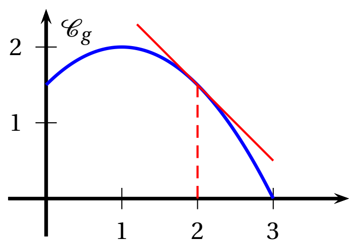
On note g' sa fonction dérivée ; on a :

a. $\boxed{g'(2) = -1}$

b. $g'(2) = -5$

c. $g'(2) = \dfrac{4}{3}$

d. $g'(2) = 2$



La tangente à la courbe au point d'abscisse 2 a un coefficient directeur égal à -1.

5. Soit la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$.

Une primitive H de h peut être définie sur $\mathbf{R}$ par :

a. $H(x) = 3\mathrm{e}^{3x+2}$ **b.** $\boxed{H(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+2}}$

c. $H(x) = (3x+2)\mathrm{e}^{3x+2}$ **d.** $H(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$

Si $H(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+2}$ alors $H'(x) = \frac{1}{3} \times 3\,\mathrm{e}^{3x+2} = \mathrm{e}^{3x+2} = h(x)$.

6. Pour la loi normale représentée ci-contre on a $P(9 < X < 12) \approx 0,82$ (à 10^{-2} près).

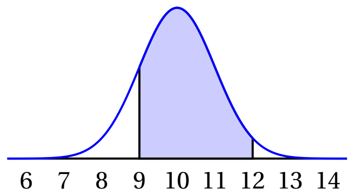
Les paramètres de la loi X sont :

a. $\mu = 10$ et $\sigma = 2$

b. $\mu = 11$ et $\sigma = 2$

c. $\boxed{\mu = 10 \text{ et } \sigma = 1}$

d. $\mu = 11$ et $\sigma = 3$



D'après la symétrie de la courbe, $\mu = 10$.
À la calculatrice, on trouve que si $\sigma = 1$, $P(9 < X < 12) \approx 0,82$.

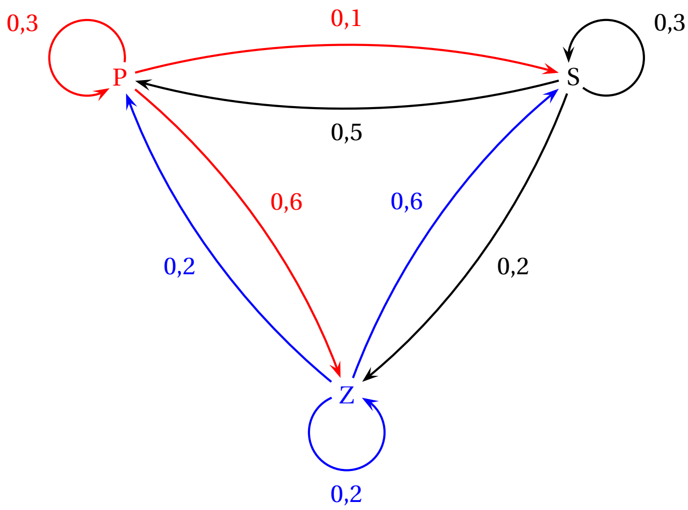
EXERCICE 2 Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans une salle de sport, trois activités sont proposées : Pilates (P), Step (S) et Zumba (Z).
D'une semaine sur l'autre les abonnés peuvent changer d'activité.
Au 1^er septembre 2015, il y a 10 % des abonnés inscrits en Pilates, 85 % en Step et 5 % en Zumba.
D'après l'analyse des données des années précédentes, le gérant prévoit que, d'une semaine sur l'autre :

- Si l'abonné était en Pilates, la semaine suivante il conserve Pilates dans 30 % des cas, sinon il choisit Step dans 10 % des cas et Zumba dans 60 % des cas.
- Si l'abonné était en Step, la semaine suivante il conserve Step dans 30 % des cas, sinon il choisit Pilates dans 50 % des cas et Zumba dans 20 % des cas.
- Si l'abonné était en Zumba, la semaine suivante il conserve Zumba dans 20 % des cas, sinon il choisit Pilates dans 20 % des cas et Step dans 60 % des cas.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux abonnés et pas de départ tout au long de l'année. Soit $E_n = \begin{pmatrix} p_n & s_n & z_n \end{pmatrix}$, la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois activités P, S et T, n semaines après le 1^er septembre 2015.

1. D'après le texte, $E_0 = \begin{pmatrix} 0,10 & 0,85 & 0,05 \end{pmatrix}$.
2. On traduit la situation par un graphe probabiliste de sommets P, S et Z :



3. On donne M la matrice carrée 3×3 de transition respectant l'ordre P, S et Z.

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

   a. D'après le cours, comme M est la matrice de transition du graphe, on a pour tout n :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & s_{n+1} & z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & s_n & z_n \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} p_n & s_n & z_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$$

   donc $p_{n+1} = 0,3p_n + 0,5s_n + 0,2z_n$.
   Donc 0,5 correspond au pourcentage d'abonnés faisant du Step qui passent au Pilates chaque semaine.

   b. $E_1 = E_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,10 & 0,85 & 0,05 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 0,10 \times 0,3 + 0,85 \times 0,5 + 0,05 \times 0,2 & 0,10 \times 0,1 + 0,85 \times 0,3 + 0,05 \times 0,6 & 0,10 \times 0,6 + 0,85 \times 0,2 + 0,05 \times 0,2 \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 0,03 + 0,425 + 0,01 & 0,01 + 0,255 + 0,03 & 0,06 + 0,17 + 0,01 \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 0,465 & 0,295 & 0,240 \end{pmatrix}$

   c. La répartition prévisible dans chaque activité au bout de trois semaines est E_3 :
   $E_3 = E_2 \times M = E_1 \times M \times M = E_1 \times M^2$
   À la calculatrice, on trouve : $E_3 = \begin{pmatrix} 0,3172 & 0,3488 & 0,3340 \end{pmatrix}$

4. D'après le cours, on peut dire que $E_6 = E_0 \times M^6$.
   À la calculatrice, on trouve, en arrondissant à 10^{-3} : $E_6 = \begin{pmatrix} 0,332 & 0,333 & 0,338 \end{pmatrix}$.
   Donc on peut dire qu'au bout de 6 semaines, environ 1/3 des abonnés se répartissent dans chaque activité.

5. Au 1^{er} septembre 2015 on compte 120 abonnés dans cette salle de sport.
   À la calculatrice, on trouve $E_8 = E_0 \times M^8 \approx \begin{pmatrix} 0,3334 & 0,3333 & 0,3333 \end{pmatrix}$.
   Donc les 120 abonnés se répartissent en 3 parties égales, soit 40 abonnés dans chaque activité.

6. **a.** On peut conjecturer que $E = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ est la matrice ligne correspondant à l'état stable.

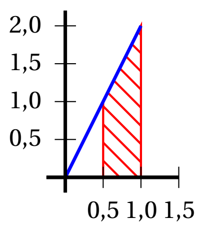
   b. $E \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0,3}{3} + \frac{0,5}{3} + \frac{0,2}{3} & \frac{0,1}{3} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,6}{3} & \frac{0,6}{3} + \frac{0,2}{3} + \frac{0,2}{3} \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = E$

   Donc la matrice ligne $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable.

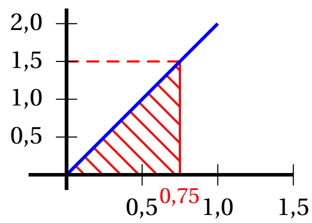
EXERCICE 3 Commun à tous les candidats 3 points

La fonction f est définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 2x$.
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité dont la fonction de densité est f.
Cette fonction de densité est représentée ci-dessous.



1. **a.** La surface hachurée est un trapèze rectangle.
L'aire d'un trapèze est donné par la formule
$$\frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2} = \frac{(1+2)\times 0,5}{2} = 0,75.$$
b. On peut donc dire que $P(0,5 \leqslant X \leqslant 1) = 0,75$.

2. La probabilité $P(0 \leqslant X \leqslant 0,75)$ est égale à l'aire de la surface hachurée ci-dessous :



Cette partie hachurée est délimitée par un triangle rectangle dont l'aire est $\frac{0,75 \times 1,5}{2} = 0,5625$.
Donc $P(0 \leqslant X \leqslant 0,75) = 0,5625$.

EXERCICE 4 Commun à tous les candidats 6 points

Une association confectionne et porte, chaque jour, à domicile des repas à des personnes dépendantes.
En 2015, 600 personnes étaient abonnées à ce service.
Pour étudier son développement, cette association a fait une enquête selon laquelle l'évolution peut être modélisée de la façon suivante :

- Chaque année, 5 % des abonnements ne sont pas renouvelés .
- Chaque année, on compte 80 nouveaux abonnements à ce service.

1. Pour suivre l'évolution du nombre d'abonnés, un gestionnaire réalise l'algorithme suivant :

```
Variables :     n et U sont des nombres
Traitement :    Affecter à U la valeur 600
                Affecter à n la valeur 0
                Tant que U < 800 faire
                  | U prend la valeur U − U × 0,05 + 80
                  | n prend la valeur n + 1
                Fin Tant que
Sortie :        Afficher n
```

a. Recopier puis compléter, en le prolongeant avec autant de colonnes que nécessaire, le tableau ci-dessous (arrondir les valeurs calculées à l'unité).

valeur de U	600	650	698	743	785	826
valeur de n	0	1	2	3	4	5
test $U < 800$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

b. La valeur affichée de n en fin d'exécution est 5.

c. Cela signifie que $n = 5$ est la première valeur pour laquelle le nombre d'abonnés va dépasser 800 ; c'est donc en 2020.

2. Cette évolution peut s'étudier à l'aide d'une suite (u_n) où u_n est le nombre d'abonnés pendant l'année $2015+n$.
On a ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 80$ et $u_0 = 600$.
a. D'après le tableau : $u_1 = 650$ et $u_2 = 698$.

b. On introduit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1600$ donc $u_n = v_n + 1600$.

- $v_{n+1} = u_{n+1} - 1600 = 0,95u_n + 80 - 1600 = 0,95(v_n + 1600) - 1520 = 0,95v_n + 1520 - 1520$
  $= 0,95v_n$
- $v_0 = u_0 - 1600 = 600 - 1600 = -1000$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = -1000$.

c. D'après la question précédente, on peut dire que, pour tout n, $v_n = v_0 \times 0,95^n = -1000 \times 0,95^n$.
Comme $u_n = v_n + 1600$, on en conclut que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1600 - 1000 \times 0,95^n$.

3. La taille des locaux ne permet pas de servir plus de 1 000 repas ; on résout l'inéquation $u_n \leqslant 1000$:

$$\begin{aligned} u_n \leqslant 1000 &\iff 1600 - 1000 \times 0,95^n \leqslant 1000 \\ &\iff 600 \leqslant 1000 \times 0,95^n \\ &\iff 0,6 \leqslant 0,95^n \\ &\iff \ln(0,6) \leqslant \ln\left(0,95^n\right) && \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;\,+\infty[\\ &\iff \ln(0,6) \leqslant n \times \ln(0,95) && \text{propriété de la fonction ln} \\ &\iff \dfrac{\ln(0,6)}{\ln(0,95)} \geqslant n && \text{car } \ln(0,95) < 0 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,6)}{\ln(0,95)} \approx 9,96$ donc u_n restera inférieur à 1 000 tant que n sera strictement inférieur à 10 ; l'association devra prévoir des travaux pour servir plus de 800 repas à partir de 2025.