Corrigé du baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2015

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Soit la fonction f définie sur $[1\,;\,100]$ par $f(x) = 200\ln x + 10x$, $f'(x)$ désigne la fonction dérivée de f. On a :

a. $f'(x) = 200 + \dfrac{1}{x}$ **b.** $\boxed{f'(x) = \dfrac{200}{x} + 10}$ **c.** $f'(x) = 200 + 10x$ **d.** $f'(x) = \dfrac{200}{x} + 10x$

La dérivée de la fonction ln est $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

2. On note L une primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction ln. Cette fonction L est :

a. croissante puis décroissante
b. décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$
c. croissante sur $[0\,;\,+\infty[$
d. $\boxed{\text{décroissante puis croissante}}$

La fonction ln est négative sur $]\,0\,;\,1\,[$ puis positive donc n'importe laquelle de ses primitives est décroissante puis croissante.

3. La fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$ est :

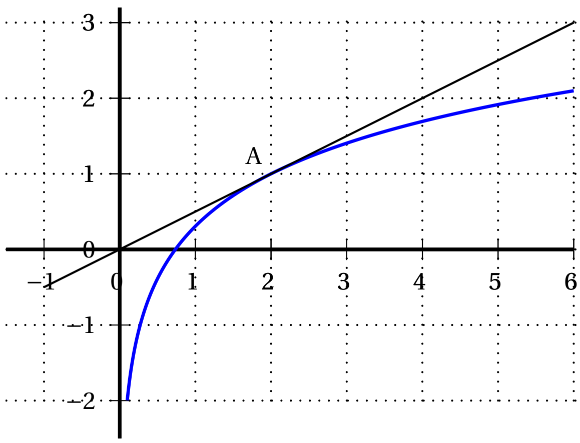
a. $\boxed{\text{convexe sur }]0\,;\,+\infty[}$
b. concave sur $]0\,;\,+\infty[$
c. ni convexe ni concave sur $]0\,;\,+\infty[$
d. change de convexité sur $]0\,;\,+\infty[$

$g(x) = x - \ln x$ donc $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et donc $g''(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$g''(x) > 0$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, donc g est convexe sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

4. On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction h définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2. Par lecture graphique, on peut conjecturer que :

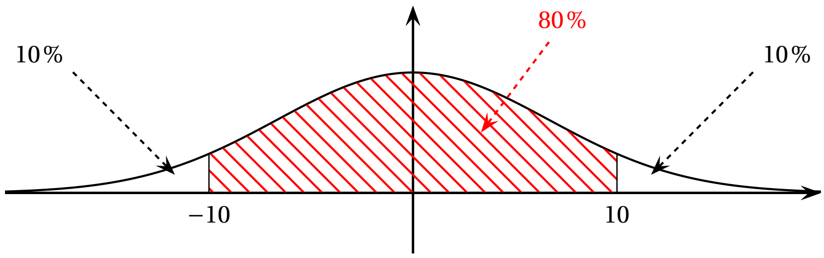
a. $h'(2) = 2$
b. $\boxed{h'(2) = \dfrac{1}{2}}$
c. $h'(2) = 0$
d. $h'(2) = 1$



$h'(2)$ est le coefficient directeur de la droite tracée soit $\dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \dfrac{1}{2}$.

5. La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart type σ inconnu mais on sait que $P(-10 < X < 10) = 0,8$. On peut en déduire :
   a. $P(X < 10) = 0,1$
   b. $P(X < 10) = 0,2$
   c. $P(X < 10) = 0,5$
   d. $\boxed{P(X < 10) = 0,9}$

   Un petit dessin peut expliquer la réponse :

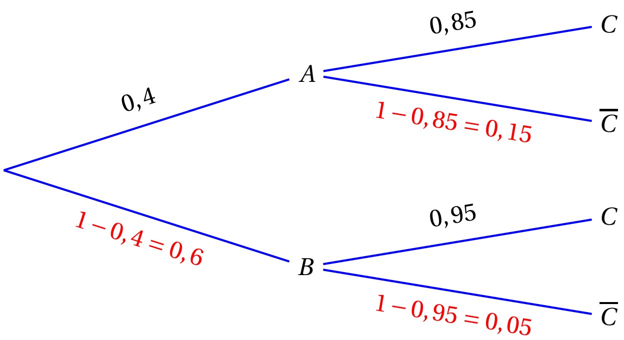


Exercice 2 — 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

PARTIE A

1. On construit un arbre pondéré traduisant la situation :



2. L'événement « la pomme n'est pas commercialisable » est l'événement $\overline{C}$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(\overline{C}) = P(\overline{C} \cap A) + P(\overline{C} \cap B) = P(A) \times P_A(\overline{C}) + P(B) \times P_B(\overline{C}) = 0,4 \times 0,15 + 0,6 \times 0,05 = 0,06 + 0,03 = 0,09$
3. Il s'agit, dans cette question, de comparer $P_{\overline{C}}(A)$ et $P_{\overline{C}}(B)$.
   $P_{\overline{C}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{0,06}{0,09} = \dfrac{2}{3}$; $P_{\overline{C}}(B) = \dfrac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{0,03}{0,09} = \dfrac{1}{3}$
   Donc le responsable des achats a raison quand il dit qu'une pomme non commercialisable a deux fois plus de chance de provenir du fournisseur A que du fournisseur B.

PARTIE B

On prend au hasard 15 pommes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de pommes commercialisables suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 1 - 0,09 = 0,91$.

1. La probabilité que les 15 pommes soient toutes commercialisables est :
   $P(X = 15) = \dbinom{15}{15} 0,91^{15}\, 0,09^{0} \approx 0,243$

2. La probabilité qu'au moins 14 pommes soient commercialisables est :
   $P(X \geqslant 14) = P(X=14) + P(X=15) = \binom{15}{14} 0,91^{14}\, 0,09^{1} + \binom{15}{15} 0,91^{15}\, 0,09^{0} \approx 0{,}3605 + 0{,}2430 \approx 0,604$

PARTIE C

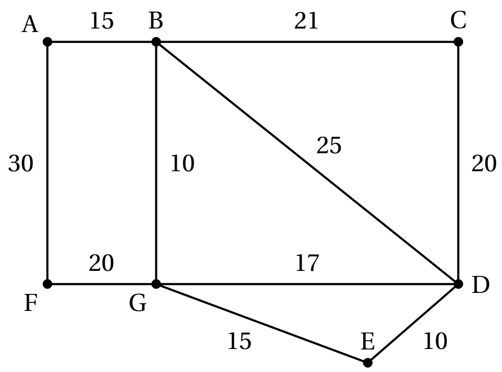
Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 200 pommes. Il s'aperçoit que 22 pommes sont non commercialisables.
$n = 200 \geqslant 30$; $np = 200 \times 0,09 = 18 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 200(1-0,09) = 182 \geqslant 5$
donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de pommes non commercialisables :

$I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ ce qui donne pour $p = 0,09$ et $n = 200$:
$I = \left[0,09 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,09 \times 0,91}}{\sqrt{200}}\,;\, 0,09 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,09 \times 0,91}}{\sqrt{200}}\right] \approx [0,050\,;\, 0,130]$
La fréquence de pommes non commercialisables dans l'échantillon est $f = \dfrac{22}{200} = 0,11$.
$f \in I$ donc le résultat est conforme à ce qu'on pouvait attendre.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un cycliste désire visiter plusieurs villages notés A, B, C, D, E, F et G reliés entre eux par un réseau de pistes cyclables.
Le graphe ci-contre schématise son plan ; les arêtes représentent les pistes cyclables et les distances sont en kilomètre.



Partie A

Pour faire son parcours, le cycliste décide qu'il procèdera selon l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	Marquer sur le plan tous les villages comme non « visités »
ligne 2	Choisir un village de départ
ligne 3	Visiter le village et le marquer « visité »
ligne 4	Rouler vers le village le plus proche
ligne 5	Tant que le village où il arrive n'est pas un village déjà visité
ligne 6 ligne 7	|visiter le village et le marquer « visité » |rouler vers le village le plus proche sans revenir en arrière
ligne 8	Fin Tant que
ligne 9	afficher la liste des villages visités

1. Le graphe est connexe, donc il y a au moins une arête qui part de n'importe quel sommet, et donc une arête de poids minimum qui part de ce sommet.
2. En partant du village G que l'on visite, on roule vers le village B (distance 10) que l'on visite, puis vers le village A (distance 14), enfin vers le village F (distance 30). De F, on ne peut se rendre que

dans un village déjà visité, G ou A, donc G puisqu'on ne revient pas en arrière ; comme le village est déjà visité, on sort de la boucle « tant que ».

$$G \xmapsto{10} B \xmapsto{15} A \xmapsto{30} F \xmapsto{20} G$$

3. La question posée revient à chercher si, en suivant cet algorithme, on peut visiter les villages C, D et E avant le village G. La réponse est positive, il suffit de partir du village C :

$$C \xmapsto{20} D \xmapsto{10} E \xmapsto{15} G \xmapsto{10} B \xmapsto{15} A \xmapsto{30} F$$

4. Partir d'un village, y revenir après avoir emprunté toutes les pistes cyclables une et une seule fois, c'est chercher un cycle eulérien ou un chemin eulérien dans ce graphe.

   D'après le théorème d'Euler, un graphe connexe admet un chemin eulérien si et seulement s'il possède exactement deux sommets de degrés impairs, et il possède des cycles eulériens si tous les sommets sont de degrés pairs.

sommet	A	B	C	D	E	F	G
degré	2	4	2	4	2	2	4

   Dans ce graphe, tous les sommets sont de degré pair, donc il existe au moins un cycle eulérien partant de chaque sommet.

   Par exemple : AB – BC – CD – DB – BG – GD – DE – EG – GF – FA est un parcours partant de A et revenant à A, qui passe par les 10 pistes cyclables une et une seule fois.

Partie B

1. La matrice M de transition de ce graphe est : $\begin{array}{c} \\ A\\B\\C\\D\\E\\F\\G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&1&1&0 \end{pmatrix}\end{array}$

   On met un 1 à l'intersection de la ligne i et de la colonne j s'il y a dans le graphe une arête qui relie le sommet de la ligne i au sommet de la colonne j ; sinon on met un 0.

2. On donne la matrice M^4 : $\begin{array}{c} \\ A\\B\\C\\D\\E\\F\\G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10&5&9&11&4&\mathbf{1}&16\\ 5&30&12&23&18&16&16\\ 9&12&12&14&9&4&18\\ 11&23&14&28&14&11&23\\ 4&18&9&14&12&9&12\\ 1&16&4&11&9&10&5\\ 16&16&18&23&12&5&30 \end{pmatrix}\end{array}$

   Le terme en gras, ligne A, colonne F (valant 1), donne le nombre de chemins contenant 4 arêtes (la puissance de la matrice M) reliant le sommet A au sommet F ; ce chemin est $AB - BD - DG - GF$.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Un couple fait un placement au taux annuel de 2 % dont les intérêts sont capitalisés tous les ans. Son objectif est de constituer un capital de 18 000 euros.

Le couple a placé le montant de 1 000 euros à l'ouverture le 1er janvier 2010 puis, tous les ans à chaque 1er janvier, verse 2 400 euros.

1. Les 1 000 euros placés en 2010 à 2 % produisent $1000 \times \dfrac{2}{100} = 20$ euros d'intérêt.
Le capital au 1er janvier 2011 après le versement annuel est $1000 + 20 + 2400 = 3420$ euros.

2. On veut déterminer la somme présente sur le compte après un certain nombre d'années.
On donne ci-dessous trois algorithmes :

algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3
Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Entrée** Saisir une valeur pour N **Début traitement** Affecter 1 000 à U Pour i de 1 à N faire | Affecter $1,02 \times U + 2400$ à U Fin Pour Afficher U **Fin traitement**	**Variables :** U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Entrée** Saisir une valeur pour N **Début traitement** Pour i de 1 à N faire | Affecter 1 000 à U | Affecter $1,02 \times U + 2400$ à U Fin Pour Afficher U **Fin traitement**	**Variables :** U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Entrée** Saisir une valeur pour N **Début traitement** Affecter 1 000 à U Pour i de 1 à N faire | Affecter $1,02 \times U + 2400$ à U | Affecter $N + 1$ à N Fin Pour Afficher U **Fin traitement**

a. Pour $N = 5$, on remplit le tableau avec les valeurs données par l'algorithme 1 :

valeur de i	xxx	1	2	3	4	5
valeur de U	1 000	3 420	5 888,40	8 406,17	10 974,29	13 593,78

b. La valeur affichée par l'algorithme 1 pour $N = 5$ est 13 593,78 ; c'est le montant du capital obtenu après versement annuel le 1er janvier 2010 + 5 soit 2015.

c.
- Dans l'algorithme 2, on affecte 1 000 à U à l'intérieur de la boucle « pour » ; l'algorithme donnera donc toujours comme résultat $1,02 \times 1000 + 2400 = 3420$, quelle que soit la valeur de N entrée.
- Dans l'algorithme 3, on modifie la valeur de N à chaque tour de boucle ; cet algorithme ne s'arrêtera jamais.

3. À partir de la naissance de son premier enfant en 2016, le couple décide de ne pas effectuer le versement du premier janvier 2017 et de cesser les versements annuels tout en laissant le capital sur ce compte rémunéré à 2 %.

La somme présente sur le compte au 1er janvier 2015 est 13 593,78 euros, donc la somme présente sur le compte au 1er janvier 2016 est : $13593,78 \times 1,02 + 2400 \approx 16265,65$ euros.

À partir de 2016, le compte rapporte 2 % et il n'y a plus de versement annuel ; donc pour passer d'une année à la suivante, il faut augmenter la somme de 2 % donc multiplier par 1,02.

Si on appelle S_n la somme présente sur le compte le 1er janvier de l'année $2016 + n$, on a donc : $S_{n+1} = 1,02 \times S_n$. La suite (S_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $S_0 = 16265,65$; on a donc pour tout entier naturel n, $S_n = S_0 \times q^n = 16265,65 \times 1,02^n$.

On cherche alors une valeur entière de n telle que $16265,65 \times 1,02^n \geqslant 18000$:

$$\begin{aligned}
16265,65 \times 1,02^n \geqslant 18000 &\iff 1,02^n \geqslant \frac{18000}{16265,65} \\
&\iff \ln\left(1,02^n\right) \geqslant \ln \frac{18000}{16265,65} && \text{croissance de la fonction ln} \\
&\iff n \ln(1,02) \geqslant \ln \frac{18000}{16265,65} && \text{propriété de la fonction ln} \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln \frac{18000}{16265,65}}{\ln(1,02)} && \text{car } \ln(1,02) > 0
\end{aligned}$$

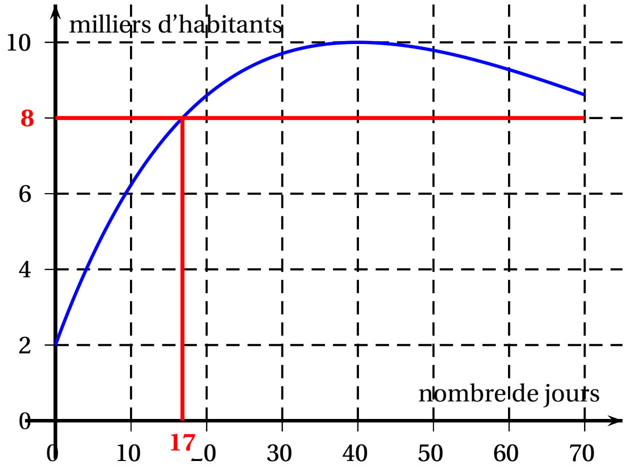
Or $\dfrac{\ln \frac{18000}{16265,65}}{\ln(1,02)} \approx 5,14$ donc l'objectif sera atteint pour $n = 6$ soit au 1er janvier 2022.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f, définie sur l'intervalle $[0 ; 70]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $f(x)$ désigne la population en milliers d'habitants.
Ainsi $x = 30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.
On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau par jour.



Partie A

1. **a.** D'après le graphique, le maximum de la fonction f est $f(40) = 10$.
Le nombre 40 correspond au 10 août, et 10 correspond à 10 000 habitants.
Le nombre maximum d'habitants est donc de 10 000 et est atteint le 10 août.

   b. Chaque habitant consomme entre 45 et 55 litres d'eau ; donc 10 000 habitants consommeront entre 450 000 et 550 000 litres au maximum.
Comme la commune peut fournir 600 000 litres d'eau par jour, c'est suffisant pour la journée la plus chargée, donc pour toutes les autres.

2. Le maximum d'habitants prévus est 10 000 donc 80 % du maximum est égal à 8 000 habitants.
Chercher le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants est supérieur à 80 % du nombre maximal prévu, revient à résoudre sur l'intervalle $[0 ; 70]$ l'inéquation $f(x) \geqslant 8$ (voir graphique).
$f(x) \geqslant 8$ sur l'intervalle $[17 ; 70]$, soit pendant 53 jours.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 70]$ par $f(x) = 2 + 0,2x\mathrm{e}^{-0,025x+1}$

1. $f(9) = 2 + 0,2 \times 9 \times \mathrm{e}^{-0,025\times 9+1} \approx 5,90706$
$x = 9$ correspond au 10 juillet ; il y a une estimation de $5,907 \times 1000 = 5907$ habitants à cette date.
Chaque habitant consomme au maximum 55 litres, donc la consommation d'eau maximale le 10 juillet sera de $5907 \times 55 \approx 324885$ litres que l'on peut majorer par 324 890 litres.

2. **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; 70]$ et :
$f'(x) = 0,2 \times 1 \times \mathrm{e}^{-0,025x+1} + 0,2x \times (-0,025)\,\mathrm{e}^{-0,025x+1} = (0,2 - 0,005x)\,\mathrm{e}^{-0,025x+1}$

   b. Pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-0,025x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $0,2 - 0,005x$.
$0,2 - 0,005x > 0 \iff 0,2 > 0,005x \iff \dfrac{0,2}{0,005} > x \iff 40 > x$

x	0		40		70
$0,2 - 0,005x$		+	0	−	
$f'(x)$		+	0	−	

   c. D'après le signe de sa dérivée, la fonction f est croissante sur $[0 ; 40]$, puis décroissante sur $[40 ; 70]$; elle atteint donc un maximum pour $x = 40$. Cette valeur de x correspond au 10 août et à un maximum de population dans la station, donc à un maximum de consommation d'eau.

Partie C

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$ par $g(x) = 55f(x) = 110 + 11x\mathrm{e}^{-0,025x+1}$
Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $g(x)$ représente alors la consommation maximale d'eau prévue ce jour là et exprimée en m^3.
Soit la fonction G définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$ par $G(x) = 110x - (440x + 17\,600)\mathrm{e}^{-0,025x+1}$
On admet que la fonction G est une primitive de la fonction g.
La somme $S = g(10) + g(11) + g(12) + \cdots + g(20)$ représente la consommation maximale d'eau du 10e au 20e jour exprimée en m^3.

1. $g(10) = g(10) \times 1$ est l'aire d'un rectangle de largeur 1 et de longueur $g(10)$; donc $S = g(10) + g(11) + \ldots + g(20)$ est la somme des aires des 11 rectangles représentés sur l'annexe en page 8.

2. La fonction g est strictement positive sur $[0\,;\,70]$ donc l'aire du domaine défini par la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 10$ et $x = 21$ est $I = \displaystyle\int_{10}^{21} g(x)\,\mathrm{d}x$.
L'aire I de ce domaine est une valeur approchée de la somme S.
La fonction G est une primitive de la fonction g donc :
$I = \displaystyle\int_{10}^{21} g(x)\,\mathrm{d}x = G(21) - G(10) \approx -40\,849,10 - (-45\,474,00) \approx 4\,624,90$
La quantité d'eau consommée du 10e au 20e jour est donc approximativement de $4\,625\ \mathrm{m}^3$.

ANNEXE

Annexe à l'exercice 4 à rendre avec la copie