∾ Baccalauréat ES Antilles – Guyane ∾
12 septembre 2013
Corrigé

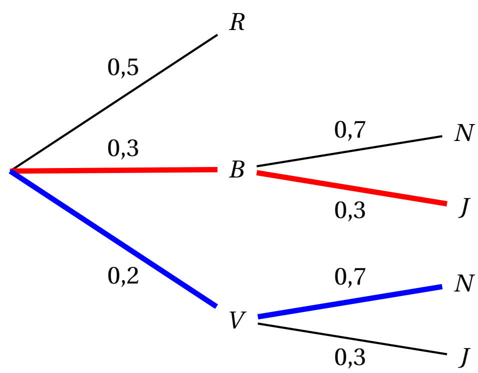
A. P. M. E. P.

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Comme il y a équiprobabilité, pour la première roue, la probabilité que le repère s'arrête sur un secteur rouge est $\dfrac{5}{10} = 0{,}5$, la probabilité qu'il s'arrête sur un secteur bleu est $\dfrac{3}{10} = 0{,}3$ et la probabilité qu'il s'arrête sur un secteur vert est $\dfrac{2}{10} = 0{,}2$.
   De même pour la seconde roue, la probabilité que le repère s'arrête sur un secteur noir est $\dfrac{7}{10} = 0{,}7$ et la probabilité qu'il s'arrête sur un secteur jaune est $\dfrac{3}{10} = 0{,}3$.
   On construit un arbre pondéré décrivant la situation :



   Les chemins correspondant à un gain sont dessinés en couleur.

2. D'après les propriétés de l'arbre pondéré : $P(B \cap J) = P(B) \times P_B(J) = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$
3. On gagne un lot si l'un des événements $B \cap J$ ou $V \cap N$ est réalisé.
   Ces deux événements étant incompatibles :
   $P(G) = P(B \cap J) + P(V \cap N) = P(B \cap J) + P(V) \times P_V(N)$
   $= 0{,}09 + 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}09 + 0{,}14 = 0{,}23$

Partie B

Un joueur fait quatre parties successives et indépendantes, et sa probabilité de gagner un lot lors d'une partie est 0,23.
Comme les parties sont indépendantes, la variable aléatoire Y qui donne le nombre de parties gagnées suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}23$.
Pour une variable aléatoire Y suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$ on sait que la probabilité d'obtenir k succès est :

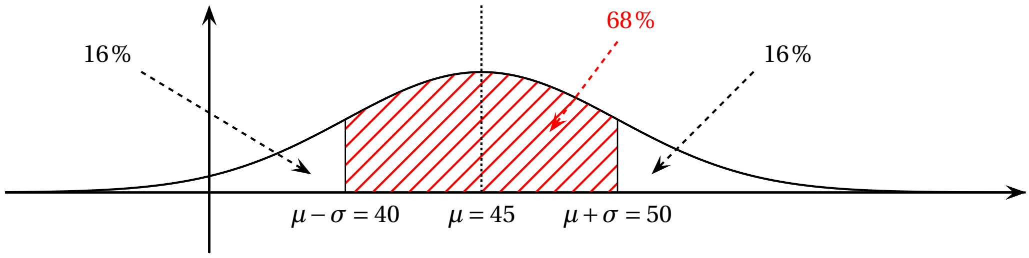
$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$P(Y = 1) = \binom{4}{1} 0{,}23^1 (1 - 0{,}23)^3 \approx 0{,}42$; la probabilité que le joueur gagne un seul lot sur les quatre parties est 0,42.

Partie C

On note X le nombre de parties gagnées durant cette période et on admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart-type $\sigma = 5$.

1. D'après la calculatrice, $P(40 < X < 50) \approx 0,68$.
   C'est un résultat connu du cours car $40 = \mu - \sigma$, $50 = \mu + \sigma$, *et on sait que* $P\left(X \in [\mu - \sigma\,;\mu + \sigma]\right) \approx 0,68$.
2. La probabilité qu'au moins 50 parties soient gagnées durant le week-end est $P(X \geqslant 50)$.
   La calculatrice donne $P(X \geqslant 50) \approx 0,16$.
   Là aussi, on pouvait connaître le résultat en appliquant le cours ; voir la « courbe en cloche » ci-dessous :



EXERCICE 2 — 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Partie A

Remarque : aucune justification n'était demandée dans cette partie.

1. **Faux**
   L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
2. **Vrai**
   Sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$, la courbe C est entièrement située au dessus de chacune de ses tangentes.
3. **Vrai**
   La tangente à la courbe au point A d'abscisse -1 est horizontale.
4. **Vrai**
   La tangente à la courbe en 0 est (BD) qui a pour coefficient directeur -1.
5. **Faux**
   La fonction est décroissante sur cet intervalle donc sa dérivée est négative.
6. **Vrai**
   On peut le démontrer en utilisant le fait que la fonction f est positive sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.

Partie B

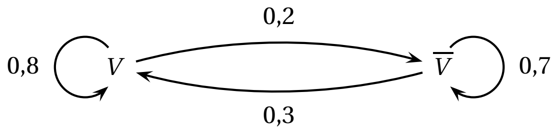
1. On résout dans $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $0{,}2\ln x - 1 \leqslant 0$:
   $0{,}2\ln x - 1 \leqslant 0 \iff 0{,}2\ln x \leqslant 1 \iff \ln x \leqslant \dfrac{1}{0{,}2} \iff \ln x \leqslant 5 \iff x \leqslant \mathrm{e}^5$
   L'ensemble solution de l'inéquation est l'intervalle $\left]0\,;\mathrm{e}^5\right]$.
   Affirmation fausse
2. Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $g(x) = x^2 - 2\ln x \Longrightarrow g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} \Longrightarrow g''(x) = 2 + \dfrac{2}{x^2}$
   Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $g''(x) > 0$ donc la fonction g est convexe sur cet intervalle.
   Affirmation vraie

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** La probabilité qu'une cliente achète lors de la première vente promotionnelle est 0,2 donc $a_1 = 0{,}2$. La probabilité qu'elle n'achète pas lors de la première vente promotionnelle est donc $b_1 = 1 - a_1 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

   b. En notant V (achat) et $\overline{V}$ (pas d'achat) les deux sommets, le graphe probabiliste associé à la situation décrite dans le texte est :



2. **a.** D'après les données du texte $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 0{,}3\,b_n \\ b_{n+1} = 0{,}2\,a_n + 0{,}7\,b_n \end{cases}$

   Donc la matrice de transition qui fait passer de l'état n à l'état $n+1$ est $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

   b. $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}8 \times 0{,}3 & 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}8 \times 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

   $P_3 = P_2 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \times 0{,}8 + 0{,}6 \times 0{,}3 & 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}6 \times 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

   On peut aussi effectuer ces calculs à la calculatrice.

   Il semble, au vu de ces trois premières ventes promotionnelles, que la probabilité qu'a une cliente d'acheter une crème hydratante augmente.

3. Un état stable $(a \quad b)$ est tel que $\begin{cases} (a \quad b) \times M = (a \quad b) \\ a + b = 1 \end{cases}$

$(a \quad b) \times M = (a \quad b) \iff \begin{cases} 0{,}8\,a + 0{,}3\,b = a \\ 0{,}2\,a + 0{,}7\,b = b \end{cases} \iff \begin{cases} -0{,}2\,a + 0{,}3\,b = 0 \\ 0{,}2\,a - 0{,}3\,b = 0 \end{cases} \iff 0{,}2\,a - 0{,}3\,b = 0 \iff 2a - 3b = 0$

$\begin{cases} 2a - 3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - 3b = 0 \\ 3a + 3b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 5a = 3 \\ b = 1 - a \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0{,}6 \\ b = 0{,}4 \end{cases}$

L'état stable est $P = (0{,}4 \quad 0{,}6)$.

4. La problème posé est un problème de coloration du graphe, deux sommets reliés entre eux devant être colorés par des couleurs différentes.

   On établit un tableau dans lequel on range les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés. On colorie ces sommets dans l'ordre précédemment défini avec pour règle de donner à chaque sommet la couleur la plus petite, en fonction des sommets voisins qui sont déjà colorés : le sommet G est relié au sommet E donc il lui faut une autre couleur que celle de E ; le sommet A est relié à E donc il ne peut avoir la couleur 1, il est relié à G donc il ne peut pas avoir la couleur 2, il lui faut donc une troisième couleur ; etc.

Degrés	6	6	5	4	4	3	2	2
Sommets	E	G	A	F	H	B	C	D
Couleurs	1	2	3	4	5	1	3	2

   Il faut donc 5 couleurs, donc 5 lots différents qui sont : {E , B}, {G , D}, {A , C}, {F} et {H}.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	Saisir n entier positif
Traitement :	X prend la valeur 80 {Initialisation} Pour i allant de 1 à n Affecter à X la valeur $0{,}9X+20$ Fin Pour X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur
Sortie :	Afficher X

1. Si on donne à n la valeur 2, la variable de boucle i prend successivement les deux valeurs $i=1$ puis $i=2$.
Avant d'entrer dans la boucle, on affecte à X la valeur 80.
Quand $i=1$, on entre une fois dans la boucle et X prend la valeur $0{,}9\,X+20$ soit $0{,}9\times 80+20=92$.
Quand $i=2$, on entre une deuxième fois dans la boucle et X prend la valeur $0{,}9\,X+20$ soit $0{,}9\times 92+20=102{,}8$.
On sort de la boucle et X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur, soit 102.
Pour la valeur $n=2$ saisie, la valeur affichée par l'algorithme est donc 102.
2. L'année $n=2$ correspond à $2005+2=2007$.
Donc on peut supposer qu'en 2007 il y a 102 adhérents au club de randonnée.

Partie B

1. On considère la suite (a_n) définie par $a_0=80$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0{,}9a_n+20$.
Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n=a_n-200$ donc $a_n=b_n+200$.
   a. Pour tout n, $b_{n+1}=a_{n+1}-200=0{,}9\,a_n+20-200=0{,}9\,(b_n+200)-180=0{,}9\,b_n+180-180=0{,}9\,b_n$
   $b_0=a_0-200=80-200=-120$
   Donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q=0{,}9$ et de premier terme $b_0=-120$.
   b. D'après le cours, on peut dire que pour tout entier naturel n, $b_n=b_0\times q^n=-120\times 0{,}9^n$.
2. Pour tout n, $b_n=-120\times 0{,}9^n$; or $a_n=b_n+200$. Donc pour tout entier naturel n, $a_n=200-120\times 0{,}9^n$.
3. La suite (b_n) est géométrique de raison 0,9 ; or $0<0{,}9<1$ donc la suite (b_n) est convergente et a pour limite 0.
D'après les théorèmes sur les limites de suites, comme pour tout n, $a_n=b_n+200$, on peut dire que la suite (a_n) est convergente et a pour limite 200.

Partie C

1. On va résoudre l'inéquation $a_n\geqslant 180$:
$$a_n\geqslant 180 \iff 200-120\times 0{,}9^n\geqslant 180 \iff 20\geqslant 120\times 0{,}9^n \iff \frac{20}{120}\geqslant 0{,}9^n$$
$$\iff \frac{1}{6}\geqslant 0{,}9^n \iff \ln\left(\frac{1}{6}\right)\geqslant \ln\left(0{,}9^n\right) \iff \ln\left(\frac{1}{6}\right)\geqslant n\times\ln(0{,}9) \iff \frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{\ln(0{,}9)}\leqslant n \text{ car } \ln 0{,}9<0$$
$\dfrac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{\ln(0{,}9)}\approx 17{,}01$ donc à partir de $n=18$, a_n est supérieur à 180 ; l'objectif est donc réalisable.
À la calculatrice, on trouve $a_{17}\approx 179{,}99$ *et* $a_{18}\approx 181{,}99$.
2. Pour tout n, $a_n=200-120\times 0{,}9^n$ donc a_n est toujours inférieur à 200.
Donc l'objectif d'atteindre 300 adhérents est impossible.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des pièces métalliques pour la construction automobile. On modélise le bénéfice journalier par la fonction B définie sur $[0\ ;\ 10]$ par $B(x) = x + 4\mathrm{e}^{-x} - 5$, où x représente le nombre de pièces produites et vendues, exprimé en centaines, et $B(x)$ représente le bénéfice en milliers d'euros.

1. **a.** $B'(x) = 1 - 4\,\mathrm{e}^{-x}$

   b. $B'(x) = 0 \iff 1 - 4\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff \dfrac{1}{4} = \mathrm{e}^{-x} \iff \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) = -x \iff -\ln 4 = -x \iff \ln 4 = x$

   c. $B(0) = 0 + 4\,\mathrm{e}^{0} - 5 = -1$; $B(10) = 10 + 4\,\mathrm{e}^{-10} - 5 = 5 + 4\,\mathrm{e}^{-10}$;
   $B(\ln 4) = \ln 4 + 4\,\mathrm{e}^{-\ln 4} - 5 = \ln 4 + \dfrac{4}{\mathrm{e}^{\ln 4}} - 5 = \ln 4 + \dfrac{4}{4} - 5 = \ln 4 - 4$

   d. $B'(x) > 0 \iff 1 - 4\,\mathrm{e}^{-x} > 0 \iff \dfrac{1}{4} > \mathrm{e}^{-x} \iff \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) > -x \iff -\ln 4 > -x \iff \ln 4 < x$;
   d'où le tableau de variation de la fonction B sur $[0\,;10]$:

x	0		$\ln 4$		10
$B'(x)$		$-$	0	$+$	
$B(x)$	-1	$\searrow$	$\ln 4 - 4$	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-10} + 5$

2. **a.** $B(0) = -1 < 0$; $B(\ln 4) = \ln 4 - 4 \approx -2{,}6 < 0$ et $B(10) = 4\,\mathrm{e}^{-10} + 5 \approx 5 > 0$.
   On complète le tableau de variation de la fonction B :

x	0		$\ln 4$		α		10
$B(x)$	-1	$\searrow$	$\ln 4 - 4$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-10} + 5$

   D'après le tableau de variation, l'équation $B(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[\ln 4\,;10]$.

   b. $\begin{cases} B(4) \approx -0{,}93 < 0 \\ B(5) \approx 0{,}03 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha \in [4\,;5]$; $\begin{cases} B(4{,}9) \approx -0{,}07 < 0 \\ B(5{,}0) \approx 0{,}03 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha \in [4{,}9\,;5{,}0]$;
   $\begin{cases} B(4{,}97) \approx -0{,}002 < 0 \\ B(4{,}98) \approx 0{,}007 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha \in [4{,}97\,;4{,}98]$

3. L'entreprise sera bénéficiaire quand x sera tel que $B(x)$ est positif, donc quand $x > \alpha$.
   Le plus petit entier supérieur à α est 5 donc l'entreprise est bénéficiaire à partir de 5 unités produites et vendues.