Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat terminale ES Antilles-Guyane 16 juin 2017

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. A et B sont deux évènements d'une expérience aléatoire. On note $\overline{B}$ l'évènement contraire de B. On sait que : $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,42$. On peut affirmer que :

   a. $P_A(B) = 0,3$.

   b. $P(A \cup B) = 0,58$.

   c. $\boxed{P_B(A) = 0,84}$.

   d. $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,28$.

   — $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,42 = 0,68$.

   — $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,42}{0,6} = 0,7$.

   — $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,42}{0,5} = 0,84$.

   — $P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right)$ d'où $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,42 = 0,18$.

2. Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

   a. L'espérance de cette loi X est $\dfrac{2}{5}$.

   b. $\boxed{p(X > 2) = \dfrac{3}{5}}$.

   c. $p(X \leqslant 2) = \dfrac{3}{5}$.

   d. $p(X \leqslant 5) = 0$.

   Si X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a ; b]$, $p(c < X < d) = \dfrac{d-c}{b-a}$

   — $E(X) = \dfrac{0+5}{2} = \dfrac{5}{2}$

   — $p(X > 2) = p(2 < X \leqslant 5) = \dfrac{5-2}{5-0} = \dfrac{3}{5}$

   — $p(X \leqslant 2) = p(0 \leqslant X \leqslant 5) = \dfrac{2-0}{5-0} = \dfrac{2}{5}$

   — $p(X \leqslant 5) = p(0 \leqslant X \leqslant 5) = \dfrac{5-0}{5-0} = 1$

3. Une machine remplit des flacons dont le volume annoncé est de 100 mL. On admet que le volume contenu dans le flacon peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 100 mL et d'écart type 2 mL.

a. $p(Y \leqslant 100) = 0,45$.

b. $p(Y > 98) = 0,75$.

c. $\boxed{p(96 \leqslant Y \leqslant 104) \approx 0,95}$.

d. $p(Y \leqslant 110) \approx 0,85$.

4. Un article de journal affirme, qu'en France, il y a 16 % de gauchers. Un chercheur souhaite vérifier cette affirmation. Pour cela, il veut déterminer la taille de l'échantillon de la population française à étudier qui permettrait d'obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,1 au niveau de confiance de 0,95. La taille de l'échantillon est :

a. 30.

b. 64.

c. 100.

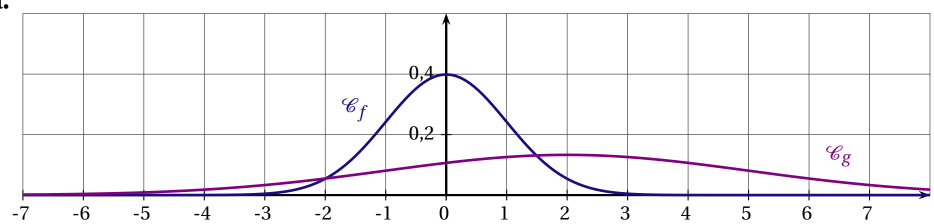
d. $\boxed{400}$.

L'amplitude de l'intervalle de confiance est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$

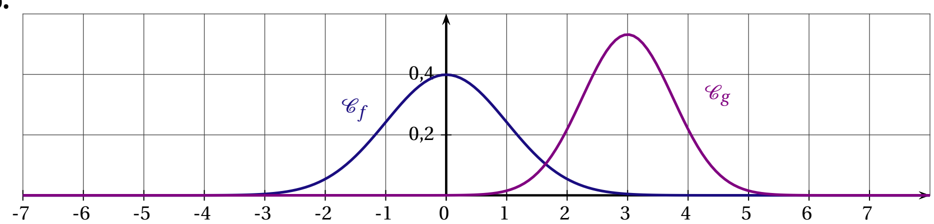
On résout $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0,1 \iff \sqrt{n} = 20 \iff n = 400$

5. La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$. La fonction g est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 2$. La représentation graphique de ces deux fonctions est :

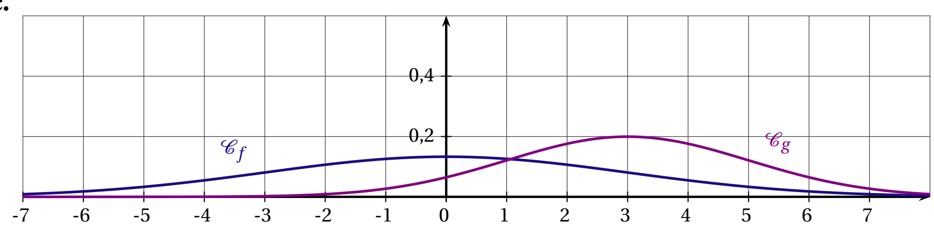
a.



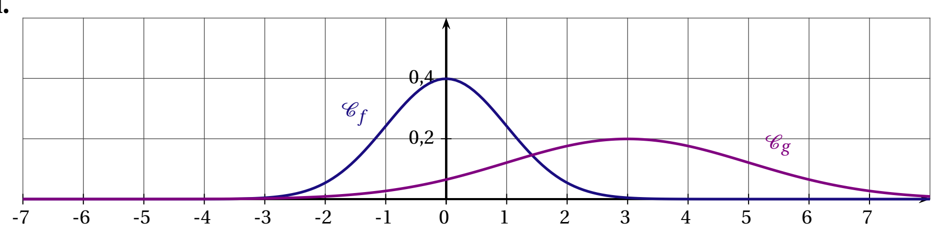
b.



c.



d.



f est la densité associée à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$ donc $f(0) \simeq 0,4$ donc on peut éliminer c.
g est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 2$.La représentation graphique de cette fonction est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 3$. On peut donc éliminer a.
De plus, on sait que $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \simeq 0,68$ soit $P(1 \leqslant X \leqslant 4) \simeq 0,68$, on peut donc exclure b car l'aire sous la courbe représentative de g entre 1 et 5 est supérieure à 4 carreaux soit 0,8. $\boxed{\text{Réponse d}}$

Exercice 2 **5 points**
Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Un particulier possède une piscine et décide de s'équiper d'un système automatique de remplissage pour tenir compte de l'évaporation pendant la période estivale. Sur un site spécialisé, il apprend que les conditions climatiques dans sa région pendant cette période sont telles qu'il peut prévoir une évaporation quotidienne de 4 % de la quantité d'eau. Il décide alors de régler son système de remplissage automatique à un apport de 2 m^3 d'eau par jour.
Le premier jour de la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage, la piscine contient 75 m^3.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube $\left(\text{m}^3\right)$, n jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.
Ainsi, $u_0 = 75$.

1. Calculer u_1 et u_2.
   $u_1 = \left(1 - \dfrac{4}{100}\right) \times 75 + 2 = 74$;
   $u_2 = 0,96 \times 74 + 2 = 73,04$.
2. Justifier que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
   $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
   $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.
3. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,96 \times u_n + 2$.
   u_n est le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), n jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage. u_{n+1} est le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), $n+1$ jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.
   Chaque jour il peut prévoir une évaporation quotidienne de 4 % , une baisse de 4 % correspond à multiplier par $\left(1 - \dfrac{4}{100}\right)$ et il apporte de 2 m^3 d'eau par jour
   donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,96 \times u_n + 2$.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 50$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme v_0.
   Pour tout entier n on a :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 50$
   $= 0,96u_n + 2 - 50$
   $= 0,96\,(v_n + 50) - 48$
   $= 0,96v_n + 48 - 48$
   $= 0,96v_n$
   $v_0 = u_0 - 50 = 75 - 50 = 25$
   Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 25$ et de raison $q = 0,96$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n. (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 25$ et de raison $q = 0,96$ donc, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 25 \times 0,96^n$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 25 \times 0,96^n + 50$.
On a vu que, pour tout n, $v_n = 25 \times 0,96^n$ et $u_n = v_n + 50$ donc,
pour tout n, $u_n = 25 \times 0,96^n + 50$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
(v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 ;
or $0 < 0,96 < 1$ donc la suite (v_n) a pour limite 0.
Pour tout n, $u_n = v_n + 50$ donc la suite (u_n) a pour limite 50.
Au bout d'un grand nombre de jour le volume d'eau stagnera à 50m^3

5. Si le volume d'eau dans la piscine est inférieur à 65m^3, le niveau de l'eau est insuffisant pour alimenter les pompes de filtration ce qui risque de les endommager. Pour connaître le nombre de jours pendant lesquels le niveau d'eau reste suffisant sans risquer de panne en conservant ce réglage, on construit l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre entier naturel	L1
	u est un nombre réel	L2
Traitement :	n prend la valeur 0	L3
	u prend la valeur 75	L4
	Tant que $u \geqslant 65$	L5
	u prend la valeur $0,96 \times u + 2$	L6
	n prend la valeur $n+1$	L7
	Fin Tant que	L8
Sortie :	Afficher n	L9

a. Recopier et compléter les lignes L5 et L6 de cet algorithme.

b. Quel est le résultat affiché en sortie de cet algorithme ?
L'algorithme affiche le premier jour à partir duquel le volume d'eau devient insuffisant. Ici $n = 13$

c. Pendant combien de jours le niveau de l'eau est-il suffisant si on conserve ce réglage ?

$$\begin{aligned}
25 \times 0,96^n + 50 \leqslant 65 &\iff 25 \times 0,96^n \leqslant 65 - 50 \\
&\iff 0,96^n \leqslant \frac{15}{25} \\
&\iff \ln(0,96^n) \leqslant \ln(0,6) && \text{croissance de la fonction ln sur }]0~;~+\infty[\\
&\iff n \times \ln(0,96) \leqslant \ln(0,6) && \text{propriété de la fonction ln} \\
&\iff n \geqslant \left(\frac{\ln(0,6)}{\ln(0,96)}\right) && \text{car } \ln(0,96) < 0 \\
&\iff n \geqslant 12,51
\end{aligned}$$

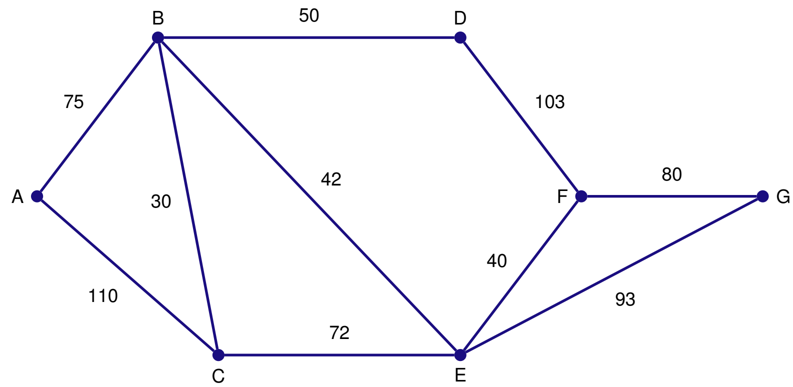
Le niveau est suffisant pendant 12 jours.

Exercice 2 **5 points**
Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Le graphe ci-dessous représente le plan d'un centre de vacances. Les arêtes représentent les allées et les sommets, les carrefours. On a indiqué sur chaque arête la longueur en mètre des allées entre deux carrefours.



1. Le service d'entretien doit nettoyer toutes les allées. En partant du carrefour C, peut-on nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles ? Justifier la réponse.

   Effectuer un parcours qui passe une seule fois par chaque allée c'est chercher si il existe une chaîne eulérienne.

   Le graphe est connexe car deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaîne et il n'y a que deux sommets C et F de degré impair donc d'après le théorème d'Euler, il existe donc des chaînes eulériennes d'extrémités C et F. Donc en partant de C il est possible de trouver un parcours passant une et une seule fois par chaque allée et terminant par F.

2. Existe-t-il un parcours permettant de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles et de revenir au point de départ ? Justifier la réponse.

   Effectuer un tel parcours c'est chercher s'il existe un cycle eulérien. Pour qu'un graphe connexe admette un cycle eulérien, il faut que tous ses sommets soient de degré pair. Ce qui n'est pas le cas donc un tel parcours n'est pas possible

3. Déterminer le trajet le plus court pour aller du carrefour A au carrefour G.

A	B	C	D	E	F	G	Sommet choisi
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	75(A)	110(A)	∞	∞	∞	∞	B
		75+30 = 105(B)	75+50 = 125(B)	75+42 = 117(B)	∞	∞	C
			125(B)	105+72 117(B)	∞	∞	E
					117+40 = 157(F)	117+93 = 210(E)	F
						157+80 210(E)	G

Le chemin le plus court pour aller de A vers G est de longueur 210 : A – B – E – G

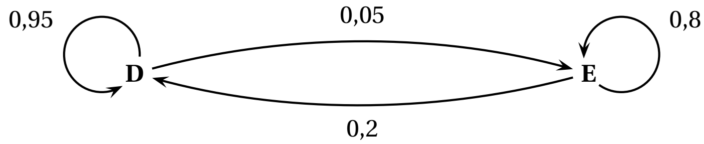
PARTIE B

Dans ce centre de vacances, les vacanciers peuvent, chaque jour, déjeuner au restaurant du centre ou à l'extérieur. On constate chaque jour que :

- 5 % des vacanciers ayant déjeuné au centre de vacances ne se réinscrivent pas pour le lendemain ;
- 20 % des vacanciers ayant déjeuné à l'extérieur s'inscrivent pour déjeuner au centre de vacances le lendemain.

On note D l'état « Déjeuner au centre de vacances » et E l'évènement « Déjeuner à l'extérieur ».

1. Construire un graphe modélisant cette situation.
L'énoncé se traduit par le graphe probabiliste suivant :



2. Écrire la matrice de transition de ce graphe, les sommets étant rangés selon l'ordre alphabétique.
$M = \begin{pmatrix}0,95 & 0,05\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}$.

3. Le premier jour, le quart des vacanciers a déjeuné au centre de vacances. Quel pourcentage de vacanciers déjeunera au centre de vacances le deuxième jour ? Le cinquième jour ?
On note P_1 l'état probabiliste le 1$^{\text{er}}$ jour : $P_1 = \begin{pmatrix}0,25 & 0,75\end{pmatrix}$.
$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix}0,3875 & 0,6125\end{pmatrix}$
Le deuxième jour 38,75 % des vacanciers déjeuneront au centre.
$P_5 = P_1 \times M^4 = \begin{pmatrix}0,626 & 0,374\end{pmatrix}$
Le cinquième jour 62,6 % des vacanciers déjeuneront au centre.

4. L'état $\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix}$ est-il stable ?
On note $P = \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.
On sait que l'état stable $P = \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ vérifie l'équation : $P = P \times M$.
On a donc le système : $\left\{\begin{array}{lcl}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,95 & 0,05\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}\\ a+b & = & 1\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl}a & = & 0,95a+0,2b\\ b & = & 0,05a+0,8b\\ a+b & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}0,05a-0,2b & = & 0\\ -0,05a+0,2b & = & 0\\ a+b & = & 1\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl}0,05a-0,2b & = & 0\\ a+b & = & 1\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcr}0,05(1-b)-0,2b & = & 0\\ a & = & 1-b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr}0,05 & = & 0,25b\\ a & = & 1-b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr}\dfrac{0,05}{0,25} & = & b\\ a & = & 1-b\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{lcr}0,2 & = & b\\ a & = & 0,8\end{array}\right.$

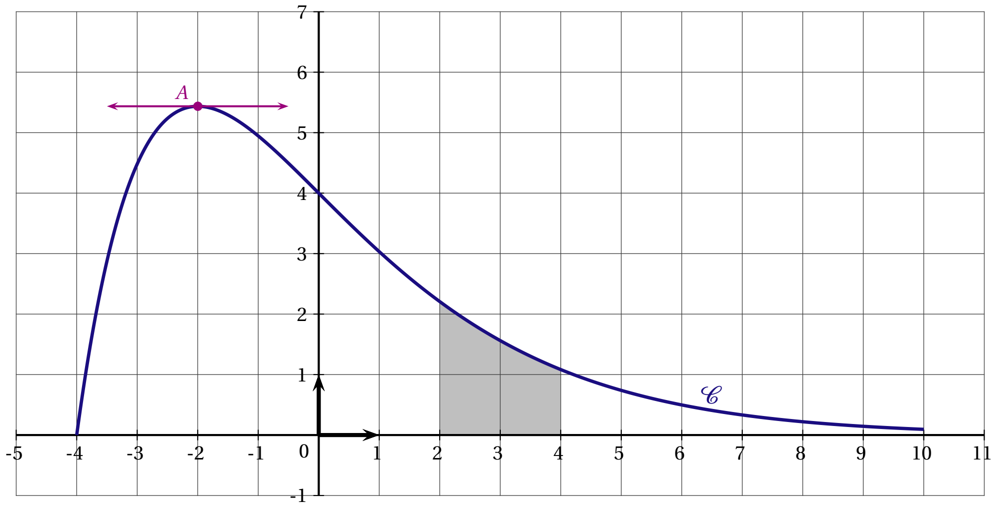
On a donc $P = \begin{pmatrix}0,8 & 0,2\end{pmatrix}$.
Donc l'état $\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix}$ n'est pas stable.

5. Peut-on affirmer qu'à terme, si les comportements des vacanciers restent les mêmes, 75 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre ?
On a vu que l'état stable est $P = \begin{pmatrix}0,8 & 0,2\end{pmatrix}$.
Donc à terme 80% des vacanciers prendront leur déjeuner au centre.

Exercice 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$. On note f' la fonction dérivée de f, et f'' sa dérivée seconde.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses.
Le domaine S grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 2$ et la droite d'équation $x = 4$.



PARTIE A

1. Déterminer, en la justifiant, la valeur de $f'(-2)$.
   $f'(-2)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A d'abscisse -2.
   En ce point la tangente est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(-2) = 0$
2. Par une lecture graphique, quel semble être le signe de $f'(4)$?
   Sur l'intervalle $[-2\ ;\ 10]$ la fonction f est décroissante donc sa dérivée est négative donc $f'(4)$ est négatif.
3. Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine S grisé sur la figure.
   L'aire du domaine S est comprise entre 3 et 4.

PARTIE B

La fonction f précédente est définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$ par $f(x) = (x+4)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. **a.** Montrer que $f'(x) = (-0,5x - 1)\mathrm{e}^{-0,5x}$.
   f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x + 4$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-0,5x}$
   $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -0,5\mathrm{e}^{0,5x}$
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 1\mathrm{e}^{-0,5x} + (x+4) \times (-0,5\mathrm{e}^{-0,5x} \\ &= \mathrm{e}^{-0,5x}(1 - 0,5x) \\ &= \mathrm{e}^{-0,5x}(-0,5x + 1) \end{aligned}$$
   b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$.
   $\mathrm{e}^{-0,5x}$ est toujours positif donc $f'(x)$ est du signe de $-0,5x + 1$.
   $-0,5x + 1 = 0 \iff x = -2$.

x	-4		-2		10
$-0,5x+1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2e	$\searrow$	14e^{-5}

c. Montrer que sur l'intervalle $[1;6]$ l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution.

On notera α cette unique solution. Sur l'intervalle $[1\ ;\ 6]$ la fonction f est dérivable donc continue et strictement décroissante. $f(1) = 5\text{e}^{-0,5} \approx 3,03$ et $f(6) = 10\text{e}^{-3} \approx 0,498$.

D'après la propriété des valeurs intermédiaires, pour tout réel $k \in [10\text{e}^{-3}\ ;\ 5\text{e}^{-0,5}]$ l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique. En particulier l'équation $f(x) = 1,5$ admet une solution unique α.

d. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.

À l'aide de la table de la calculatrice on obtient :

$f(3,11) \approx 1,5015$, $f(3,12) \approx 1,4961$ donc $\alpha \approx 3,11$.

2. On admet que la dérivée seconde de f est définie par $f''(x) = 0,25x\text{e}^{-0,5x}$.

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$.

On étudie le signe de $f''(x)$. Pour tout réel x, $\text{e}^{-0,5x} > 0$ donc f" est du signe de $0,25x$.

$0,25x = 0 \iff x = 0$

Sur $[-4\ ;\ 0]$, f est concave.

Sur $[0\ ;\ 10]$, f est convexe.

b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées. L'abscisse du point d'intersection est donc $x = 0$, son ordonnée $f(0) = 4$ d'où I a pour coordonnées $(0,4)$.

3. a. On considère la fonction F définie par $F(x) = (-2x - 12)\text{e}^{-0,5x}$. Comment peut-on montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$? *On ne demande pas d'effectuer cette vérification.*

Pour prouver que F est une primitive de f on vérifie que $F'(x) = f(x)$.

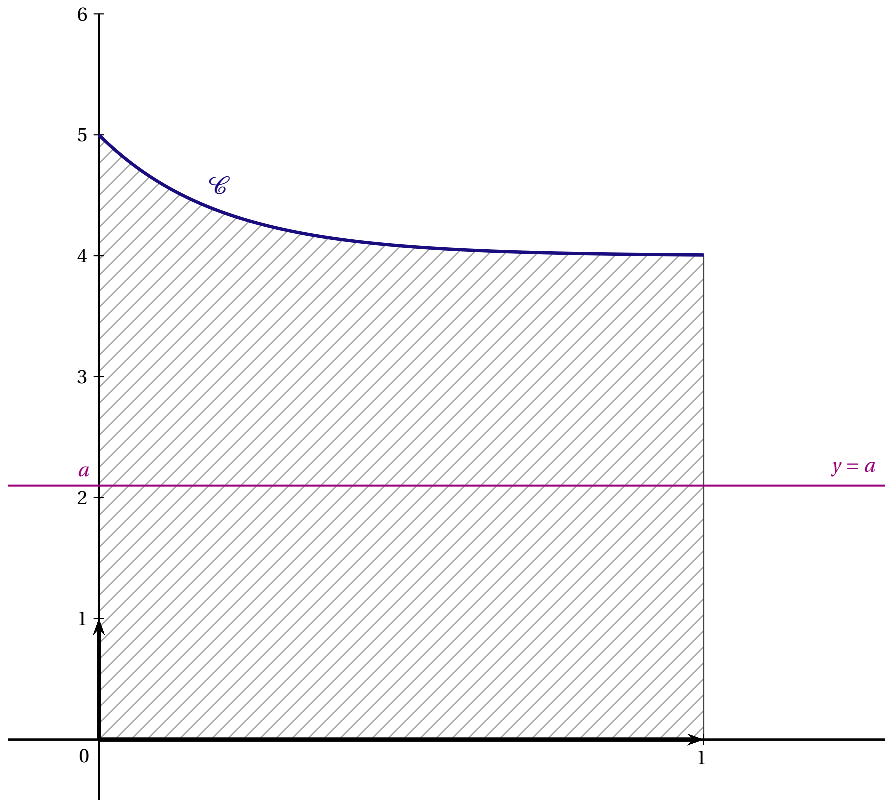
b. Calculer $S = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\text{d}x$.

$S = F(4) - F(2) = -20\text{e}^{-2} - (-16\text{e}^{-1} \approx 3,18$ u.a.

On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

Exercice 4 **3 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 4 + \text{e}^{-5x}$.
On a tracé dans le repère orthogonal ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.
Le domaine $\mathscr{D}$ hachuré sur la figure est le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
On veut partager le domaine hachuré en deux domaines de même aire par une droite d'équation $y = a$, parallèle à l'axe des abscisses, selon l'exemple donné ci-dessous.



1. **Justifier que la valeur $a = 3$ ne convient pas.**

   La fonction f est positive sur $[0~;~1]$. L'aire de la partie hachurée est donnée par :

   $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Une primitive de f est $F(x) = 4x - \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}$

   donc $I = F(1) - F(0) = 4 - \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{21}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-5} \approx 4,198$ u.a.

   Si $a = 3$ l'aire du rectangle situé sous la droite d'équation $y = 3$ est égale à 3 u.a.

   Donc la valeur $a = 3$ ne convient pas.

2. **Déterminer à 0,1 près une valeur de a qui convienne.**

   L'aire du rectangle situé sous la droite d'équation $y = a$ est $a \times 1 = a$ u. a. On résout donc $a = \dfrac{I}{2} \iff a \approx 2,099 \approx 2,1$