Corrigé du baccalauréat ES/L Amérique du Sud
21 novembre 2013

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Diminuer le budget de 6 % sur un an revient à multiplier par $1-\frac{6}{100}=0{,}94$.

   Diminuer le budget de 6 % pendant deux ans revient à multiplier par $\left(1-\frac{6}{100}\right)^2=0{,}94^2=0{,}883\,6$.

   Diminuer le budget de 6 % pendant cinq ans revient à multiplier par $\left(1-\frac{6}{100}\right)^5=0{,}94^5\approx 0{,}733\,9$.

   Multiplier par $0{,}733\,9$ revient à diminuer de $(1-0{,}733\,9)\times 100=26{,}61\,\%$ et pas de 30 % sur la période de 5 ans.

   L'affirmation 1 est fausse.

2. On étudie les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;10]$:

   $B'(x)=-2x+10>0$ sur $[0\,;5[$ et $B'(x)<0$ sur $]5\,;10]$.

   De plus $B(0)=-9$, $B(1)=-1+10-9=0$, $B(5)=-25+50-9=16$,
   $B(9)=-81+90-9=0$ et $B(10)=-100+100-9=-9$.

   D'où le tableau de variations de la fonction B sur $[0\,;10]$:

x	0	1		5		9	10
$B'(x)$			+	0	−		
$B(x)$	−9	0	↗	16	↘	0	−9

   D'après ce tableau de variations, lorsque l'entreprise produit et vend entre 1 000 et 9 000 clés USB (strictement), le bénéfice est positif.

   L'affirmation 2a est vraie.

   La fonction B est maximale quand $x=5$ donc le bénéfice est maximum pour une production et vente de 5 000 clés USB.

   L'affirmation 2b est vraie.

   Le bénéfice mensuel moyen lorsque l'entreprise produit et vend entre 2 000 clés et 8 000 clés correspond à la valeur moyenne de la fonction B entre 2 et 8, c'est-à-dire : $\dfrac{1}{8-2}\displaystyle\int_2^8 B(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}\displaystyle\int_2^8 B(x)\,\mathrm{d}x$.

   B est une fonction polynôme qui a pour primitive la fonction b définie par
   $b(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+5x^2-9x$.

   $b(8)=-\dfrac{1}{3}8^3+5\times 8^2-9\times 8=-\dfrac{512}{3}+320-72=-\dfrac{512}{3}+248=-\dfrac{512}{3}+\dfrac{744}{3}=\dfrac{232}{3}$

   $b(2)=-\dfrac{1}{3}2^3+5\times 2^2-9\times 2=-\dfrac{8}{3}+20-18=-\dfrac{8}{3}+2=-\dfrac{8}{3}+\dfrac{6}{3}=\dfrac{-2}{3}$

   $\displaystyle\int_2^8 B(x)\,\mathrm{d}x=\Big[b(x)\Big]_2^8=b(8)-b(2)=\dfrac{232}{3}-\dfrac{-2}{3}=\dfrac{234}{3}=78$; la valeur moyenne de la fonction entre 2 et 8 est donc $\dfrac{1}{6}\times 78=13$.

Le bénéfice mensuel moyen lorsque l'entreprise produit et vend entre 2 000 clés et 8 000 clés est donc de 13 000 euros.

L'affirmation 2 c est fausse.

3. Si n est la taille de l'échantillon, et f la fréquence d'apparition du caractère recherché, l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % est approximativement $I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Ici, $n = 4000$ et $f = \frac{210}{4000} = 0{,}0525$, donc

$I = \left[0{,}0525 - \frac{1}{\sqrt{4\,000}}\,;\,0{,}0525 + \frac{1}{\sqrt{4\,000}}\right] \approx [0{,}0367\,;\,0{,}0684]$

La borne supérieure de l'intervalle de confiance est approximativement 0,0684 soit 6,84 % donc elle ne dépasse pas 7 % ; à l'issue du contrôle, le directeur des ventes ne doit donc pas stopper toute la chaîne de fabrication.

L'affirmation 3 est fausse.

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 1$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f.

1. **a.** $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$

b. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$; donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

Sur $]-\infty\,;\,1[$, $1-x>0$ donc f est strictement croissante.

Sur $]1\,;\,+\infty[$, $1-x<0$ donc f est strictement décroissante.

2. **a.** D'après la question 1.b, la fonction f est strictement croissante sur $[-1\,;\,0]$; de plus $f(-1) = -\mathrm{e}+1 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$.

D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[-1\,;\,0]$.

b. D'après la calculatrice, $f(-0{,}6) \approx -0{,}09 < 0$ et $f(-0{,}5) \approx 0{,}18 > 0$ donc $\alpha \in \left[-0{,}06\,;\,-0{,}05\right]$.

3. L'équation réduite de la tangente au point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a est

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

En $a=0$, l'équation de T est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Or $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$ donc $f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ et on sait que $f(0) = 1$.

L'équation réduite de la tangente T est : $y = x+1$.

4. **a.** D'après le tableau donné dans le texte, $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2)$; cette dérivée seconde est du signe de $x-2$ car $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout réel x..

Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2[$, $x-2<0$ donc $f''(x)<0$ et donc la fonction dérivée f' est strictement décroissante.

Sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$, $x-2>0$ donc $f''(x)>0$ et donc la fonction dérivée f' est strictement croissante.

b. On sait qu'une fonction est convexe sur un intervalle si et seulement si sa dérivée première est croissante sur cet intervalle.

Or f' est croissante sur $]2\,;\,+\infty[$, donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

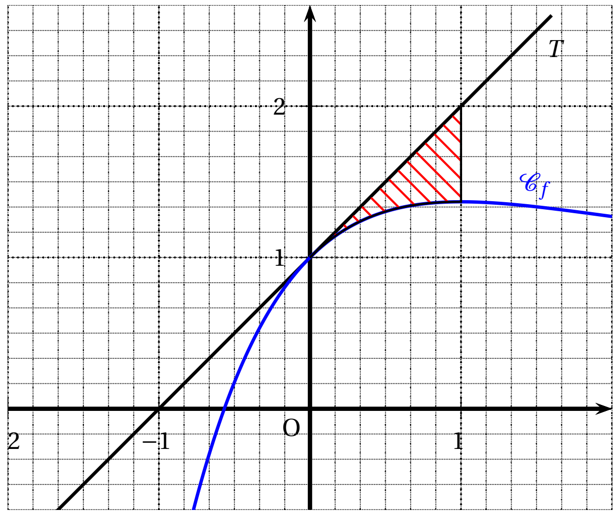
On sait qu'une fonction est concave sur un intervalle si et seulement si sa dérivée première est décroissante sur cet intervalle.

Or f' est décroissante sur $]-\infty\,;\,2[$, donc la fonction f est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2[$.

c. Une fonction est concave sur un intervalle quand sa courbe représentative est entièrement située en dessous de toutes ses tangentes. On sait que la fonction f est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$ et que T est une tangente à la courbe au point d'abscisse 0 qui appartient à $]-\infty\,;2[$.

Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de T sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$.

5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T dans un repère orthonormé.



a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^{-x}(-1-x)+x$.

F est une primitive de f si et seulement si $F' = f$.

$F'(x) = (-1)\,\mathrm{e}^{-x}(-1-x)+\mathrm{e}^{-x}(-1)+1 = \mathrm{e}^{-x}(1+x-1)+1 = x\,\mathrm{e}^{-x}+1$
$\quad = f(x)$

Donc F est une primitive de f.

b. La tangente T est d'équation $y = x+1$ donc c'est la représentation graphique de la fonction g définie par $g(x) = x+1$.

On sait que sur $]-\infty\,;2[$ la droite T est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ donc c'est encore vrai sur $[0\,;1]$; donc sur cet intervalle $g > f$ et donc $g - f > 0$.

D'après le cours, on peut dire que l'aire du domaine hachuré est, en unités d'aires,

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 \left(g-f\right)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la linéarité de l'intégration,

$\displaystyle\int_0^1 \left(g-f\right)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$

Or F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1)-F(0) = \left(\mathrm{e}^{-1}(-2)+1\right)-\left(\mathrm{e}^{0}(-1)+0\right) = 2-\mathrm{e}^{-1}.$

Cette quantité correspond à l'aire du domaine situé entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

La fonction polynôme g a pour primitive la fonction G définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2}+x$. Donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = G(1)-G(0) = \left(\frac{1}{2}+1\right)-0 = \frac{3}{2}.$

L'aire vaut en unités d'aire : $\mathscr{A} = \dfrac{3}{2}-\left(2-2\,\mathrm{e}^{-1}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-1}-\dfrac{1}{2} \approx 0{,}236$.

EXERCICE 3 **5 points**

ES : Enseignement obligatoire

L : Enseignement de spécialité

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est-à-dire le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène). Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.

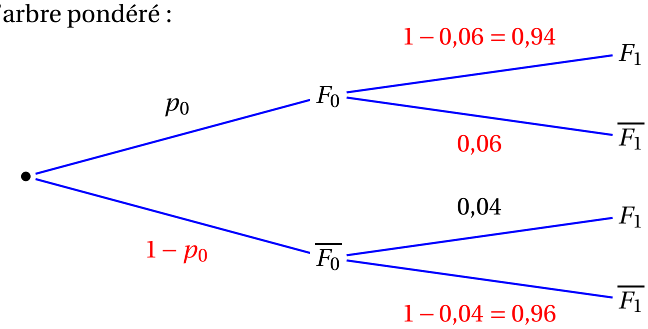
Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

- 6 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;
- 4 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :

- F_0 l'évènement « la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président » de probabilité p_0 et $\overline{F_0}$ son évènement contraire ;
- F_1 l'évènement « la personne interrogée le 1^er^ mois a une opinion favorable » de probabilité p_1 et $\overline{F_1}$ son évènement contraire.

1. **a.** On complète l'arbre pondéré :



   b. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_1 = P(F_1) = P(F_0 \cap F_1) + P\left(\overline{F_0} \cap F_1\right) = p_0 \times 0{,}94 + \left(1 - p_0\right) \times 0{,}04$$
$$= 0{,}94 p_0 + 0{,}04 - 0{,}04 p_0 = 0{,}9 p_0 + 0{,}04$$

   On admet de plus, que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}9 p_n + 0{,}04$.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	I et N sont des entiers naturels
	P est un nombre réel
Entrée :	Saisir N
Initialisation :	P prend la valeur 0,55
Traitement :	Pour J allant de 1 à N
	P prend la valeur $0{,}9P + 0{,}04$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher P

   a. Si l'utilisateur entre 1 pour valeur de N, on entre une fois dans la boucle et en sortie, on affiche P c'est-à-dire $0{,}9 \times 0{,}55 + 0{,}04 = 0{,}535$.
   La valeur affichée en sortie est $P = 0{,}535$.

   b. Cet algorithme va afficher P_N.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - 0{,}4$.

   a. $u_n = p_n - 0{,}4$ donc $u_0 = p_0 - 0{,}4 = 0{,}55 - 0{,}4 = 0{,}15$
   $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}4 = 0{,}9 p_n + 0{,}04 - 0{,}4 = 0{,}9 p_n - 0{,}36$. Or $u_n = p_n - 0{,}4$ donc $p_n = u_n + 0{,}4$
   $u_{n+1} = 0{,}9(u_n + 0{,}4) - 0{,}36 = 0{,}9 u_n + 0{,}36 - 0{,}36 = 0{,}9 u_n$
   Donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}15$ et de raison $q = 0{,}9$.

b. D'après le cours, $u_n = u_0 \times q^n = 0{,}15 \times 0{,}9^n$ pour tout entier naturel n.
$p_n = u_n + 0{,}4 = 0{,}15 \times 0{,}9^n + 0{,}4$ pour tout entier naturel n.

c. La suite (u_n) est géométrique de raison 0,9; or $-1 < 0{,}9 < 1$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

Or $p_n = u_n + 0{,}4$, donc d'après les théorèmes sur les limites de suites, on peut dire que la suite (p_n) est convergente et a pour limite 0,4.

p_n est la probabilité de l'évènement « la personne interrogée le n-ième mois a une opinion favorable ». La suite (p_n) a pour limite 0,4 qui représente 40 %.

On peut interpréter ce résultat de la façon suivante : quand le nombre de mois augmente, le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable tend vers 40 %.

4. a. $0{,}15 \times 0{,}9^n + 0{,}4 \leqslant 0{,}45 \Leftrightarrow 0{,}15 \times 0{,}9^n \leqslant 0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}9^n \leqslant \dfrac{0{,}05}{0{,}15} \Leftrightarrow 0{,}9^n \leqslant \dfrac{1}{3}$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc :

$0{,}9^n \leqslant \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \ln\left(0{,}9^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow n \times \ln(0{,}9) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Or $\ln(0{,}9) < 0$ donc $n \times \ln(0{,}9) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(0{,}9)}$

b. $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(0{,}9)} \approx 10{,}43$; l'entier immédiatement supérieur à 10,43 est 11 et 0,45 correspond à 45 %.

On peut donc dire qu'à partir du 11e mois, le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable est inférieur à 45 %.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.

L'étude révèle que :

— Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.

— Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note S l'état : « la personne pratique le ski de piste » et $\overline{S}$ l'état : « la personne pratique le snowboard ».

On note également pour tout entier naturel n :

— p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ;

— q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n-ième hiver ;

— $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième hiver.

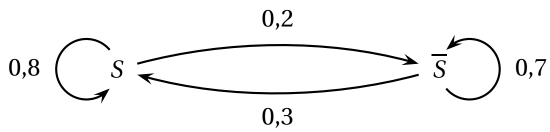
On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0 = (1 \quad 0)$.

Partie A

1. Il y a une probabilité de passer de S à $\overline{S}$ de 0,2 donc il y a une probabilité de $1 - 0{,}2 = 0{,}8$ de rester sur le sommet S.

Il y a une probabilité de passer de $\overline{S}$ à S de 0,3 donc il y a une probabilité de $1 - 0{,}3 = 0{,}7$ de rester sur le sommet $\overline{S}$.

On représente la situation à l'aide d'un graphe pondéré de sommets S et $\overline{S}$:



2. **a.** La matrice de transition M est une matrice carrée 2×2 telle que
$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times M$
D'après le graphe, on peut écrire : $\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}3q_n \\ q_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}7q_n \end{cases}$
et donc $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

b. $M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}3 & 0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}7 \\ 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}7 \times 0{,}3 & 0{,}3 \times 0{,}2 + 0{,}7 \times 0{,}7 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0{,}64 + 0{,}06 & 0{,}16 + 0{,}14 \\ 0{,}24 + 0{,}21 & 0{,}06 + 0{,}49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

c. $P_2 = \begin{pmatrix} p_2 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \end{pmatrix} \times M$; or $\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix} \times M$; donc
$P_2 = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix} \times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 \times 0{,}7 + 0 \times 0{,}45 & 1 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

3. On a vu que $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}3q_n$; or $q_n = 1 - p_n$, donc
$p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}3\left(1 - p_n\right) = 0{,}8p_n + 0{,}3 - 0{,}3p_n = 0{,}5p_n + 0{,}3$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
①	J et N sont des entiers naturels
②	p est un nombre réel
Entrée :	
③	Saisir N
Initialisation :	
④	p prend la valeur 1
Traitement :	
⑤	Pour J allant de 1 à N
⑥	p prend la valeur ....
⑦	Fin Pour
Sortie :	
⑧	Afficher p

Recopier et compléter la ligne ⑥ de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité p_N.

Partie B

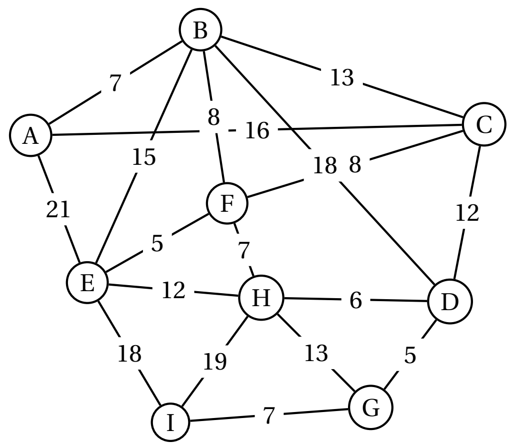
On considère, pour tout entier naturel n, l'évènement S_n : « la personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ». La probabilité de l'évènement S_n est notée $p\left(S_n\right)$. On a donc $p_n = p\left(S_n\right)$.
On sait d'après la **partie A** que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3$.
Soit la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0{,}6$.

1. On sait que $u_n = p_n - 0{,}6$ donc $p_n = u_n + 0{,}6$.
$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}6 = 0{,}5p_n + 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}5\left(u_n + 0{,}6\right) - 0{,}3 = 0{,}5u_n + 0{,}3 - 0{,}3$;
$u_{n+1} = 0{,}5u_n$.
$u_0 = p_0 - 0{,}6 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
Donc la suite $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $u_0 = 0{,}4$.

2. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $u_0 = 0{,}4$ donc, d'après le cours, $u_n = u_0 \times q^n = 0{,}4 \times 0{,}5^n$ pour tout entier naturel n.
   $p_n = u_n + 0{,}6 = 0{,}4 \times 0{,}5^n + 0{,}6$ pour tout entier naturel n.
3. La suite (u_n) est géométrique de raison 0,5 ; or $-1 < 0{,}5 < 1$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.
   Or $p_n = u_n + 0{,}6$ donc, d'après les théorèmes sur les limites de suite, on peut dire que la suite $\left(p_n\right)$ est convergente et a pour limite 0,6.
   Le nombre p_n désigne la probabilité qu'une personne pratique le ski lors du n-ième hiver ; cette probabilité tend vers 0,6. Cela veut dire que le nombre de personnes pratiquant le ski de piste tend à se rapprocher de 60 %.

Partie C

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.



On détermine, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	on garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	7(A)	∞	∞	21(A)	∞	∞	∞	∞	B
		20(B)	25(B)	~~22(B)~~ 21(A)	15(B)	∞	∞	∞	F
		~~23(F)~~ 20(B)	25(B)	~~21(A)~~ 20(F)		∞	22(F)	∞	C
			~~32(C)~~ 25(B)	20(F)		∞	22(F)	∞	E
			25(B)			∞	~~32(E)~~ 22(F)	38(E)	H
			~~28(H)~~ 25(B)			35(H)		~~41(H)~~ 38(E)	D
						~~35(H)~~ 30(D)		38(E)	G
								~~38(E)~~ 37(G)	I

Le plus court trajet pour aller de A à I a une longueur de 37 et se décompose ainsi :

$\text{A} \xrightarrow{7} \text{B} \xrightarrow{18} \text{D} \xrightarrow{5} \text{G} \xrightarrow{7} \text{I}$

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

Dans un cabinet d'assurance, une étude est réalisée sur la fréquence des sinistres déclarés par les clients ainsi que leur coût.

Partie A

Une enquête affirme que 30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année.

1. Dans le cadre d'une étude approfondie, on choisit au hasard et de manière indépendante 15 clients.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients ayant déclaré un sinistre au cours de l'année.

a. Comme 30% des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année, la probabilité qu'une personne déclare un sinistre est 0,3.

Choisir au hasard et de manière aléatoire 15 clients, revient à extraire 15 noms avec remise et de manière indépendante.

Donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de clients ayant déclaré un sinistre au cours de l'année suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,3$.

b. Si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

L'évènement $(X \geqslant 1)$ est l'évènement contraire de $(X < 1)$ donc

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$.

$P(X = 0) = \binom{15}{0} 0,3^0\, 0,7^{15} \approx 0,005$; donc $P(X \geqslant 1) \approx 1 - 0,005 \approx 0,995$.

2. a. Pour n assez grand, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est

$I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où p désigne la proportion dans la population.

$n = 100$ et $p = 0,3$ donc

$I = \left[0,3 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,3(1-0,3)}}{\sqrt{100}}\ ;\ 0,3 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,3(1-0,3)}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0,210\ ;\ 0,390]$

b. L'expert constate que 19 clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année, ce qui fait une proportion de $\dfrac{19}{100} = 0,19$.

Or $0,19 \notin I$ donc on peut dire que l'affirmation du cabinet d'assurance, « 30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année », ne peut pas être validée par l'expert.

Partie B

On note Y la variable aléatoire donnant le coût, en euros, des sinistres de faible gravité sur le deuxième semestre de l'année ; on admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 1\,200$ et d'écart-type $\sigma = 200$.

1. Dans cette question, on cherche $P(1\,000 \leqslant Y \leqslant 1\,500)$; la calculatrice donne 0,775 comme résultat arrondi à 10^{-3}.

   La probabilité qu'un sinistre de faible gravité ait un coût compris entre 1 000 € et 1 500 € est de 0,775.

2. Dans cette question, on cherche $P(Y > 1\,000)$ qui est égal à $1 - P(0 \leqslant Y \leqslant 1\,000)$ car le sinistre ne peut pas avoir un coût négatif.

   La calculatrice donne $P(0 \leqslant Y \leqslant 1\,000) \approx 0,159$ donc la probabilité qu'un sinistre de faible gravité ait un coût supérieur à 1 000 € est $1 - 0,159 = 0,841$.