∽ Corrigé du baccalauréat Terminale ES/L ∾
Amérique du Nord 29 mai 2018

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Un pépiniériste cultive des bulbes de fleurs. La probabilité qu'un bulbe germe, c'est-à-dire qu'il donne naissance à une plante qui fleurit, est de 0,85.

Il prélève au hasard 20 bulbes du lot. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 bulbes.

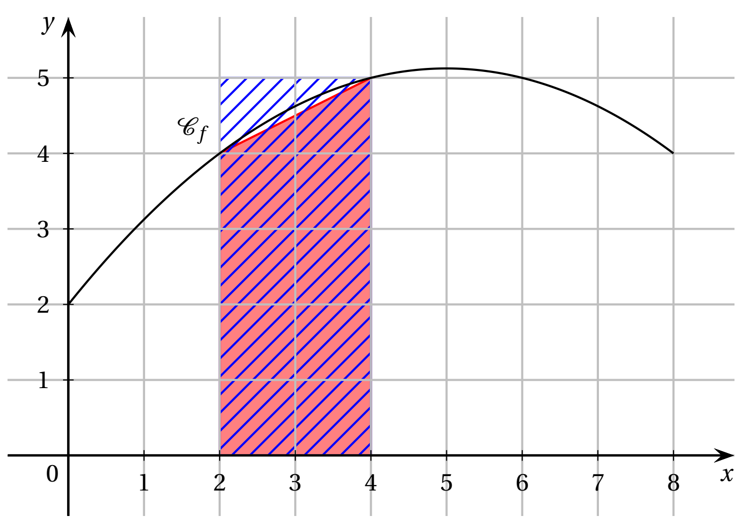
On peut affirmer que :

A.	La probabilité qu'au maximum 15 bulbes germent est proche de 0,103.
B.	La probabilité qu'au maximum 15 bulbes germent est proche de 0,067.
C.	La probabilité qu'au minimum 15 bulbes germent est proche de 0,830.
D.	La probabilité qu'au minimum 15 bulbes germent est proche de 0,933.

Réponse D.

La variable aléatoire X qui donne le nombre de bulbes qui germent suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,85$.
On obtient à la calculatrice $P(X \geqslant 15) \approx 0,933$.

2. On considère une fonction f définie sur $[0\,;8]$ dont $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative dessinée ci-dessous :



A. $8 \leqslant \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 9$	**B.** $9 \leqslant \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 10$
C. $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = f(4) - f(2)$	**D.** $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$

Réponse B.

> $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ est, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.
> Cette aire est encadrée par les deux polygones dessinés dont les aires sont de 9 et 10 (en u.a.).

3. On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \ln(x)$.
Une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$ est la fonction G définie par :

A. $G(x) = \ln(x)$	**B.** $G(x) = x\ln(x)$
C. $G(x) = x\ln(x) - x$	**D.** $G(x) = \dfrac{1}{x}$

Réponse C.

> Si $G(x) = x\ln(x) - x$, alors $G'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) = g(x)$ donc G est une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x) > 0$ est :

A. $]0\,;\,+\infty[$	**B.** $]0\,;\,1[$
C. $]1\,;\,+\infty[$	**D.** $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$

Réponse C.

> $\ln(x) > 0 \iff \ln(x) > \ln 1 \iff x > 1$

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le site internet « ledislight.com » spécialisé dans la vente de matériel lumineux vend deux sortes de rubans LED flexibles : un premier modèle dit d'« intérieur » et un deuxième modèle dit d'« extérieur ». Le site internet dispose d'un grand stock de ces rubans LED.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les rubans LED d'extérieur expédiés au site internet, 5 % sont défectueux. Le responsable internet désire vérifier la validité de cette affirmation. Dans son stock, il prélève au hasard 400 rubans LED d'extérieur parmi lesquels 25 sont défectueux.

On prend un échantillon de taille 400 donc $n = 400$. Le fournisseur affirme que 5 % des rubans sont défectueux donc la probabilité qu'un ruban soit défectueux est $p = 0{,}05$.

$n = 400 \geqslant 30$, $np = 20 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 380 \geqslant 5$ donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de rubans défectueux au seuil de 95 % :

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}05 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}05\times 0{,}95}{400}}\,;\, 0{,}05 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}05\times 0{,}95}{400}}\right] \approx [0{,}029\,;\,0{,}071]$$

La fréquence de rubans défectueux dans l'échantillon considéré est $f = \dfrac{25}{400} = 0{,}0625$.
Or $f \in I$ donc il n'y a pas de raison de remettre en cause l'affirmation du fournisseur.

2. Le fournisseur n'a donné aucune information concernant la fiabilité des rubans LED d'intérieur. Le directeur du site souhaite estimer la proportion de rubans LED d'intérieur défectueux. Pour cela, il prélève un échantillon aléatoire de 400 rubans d'intérieur, parmi lesquels 38 sont défectueux ce qui fait une fréquence $f = \dfrac{38}{400} = 0{,}095$.

$n = 400 \geqslant 30$, $nf = 38 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 362 \geqslant 5$ donc on peut établir un intervalle de confiance de cette proportion au seuil de confiance de 95 % :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}095 - \frac{1}{\sqrt{400}}\,;\, 0{,}095 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0{,}045\,;\, 0{,}145].$$

Partie B

À partir d'une étude statistique réalisée sur de nombreux mois, on peut modéliser le nombre de rubans LED d'intérieur vendus chaque mois par le site à l'aide d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 2\,500$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

1. La probabilité que le site internet vende entre 2 100 et 2 900 rubans LED d'intérieur en un mois est $P(2\,100 \leqslant X \leqslant 2\,900) \approx 0{,}683$.

C'est un résultat du cours : $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}683$, que l'on peut également retrouver avec une calculatrice.

2. a. À la calculatrice, on trouve la valeur de a telle que $P(X \leqslant a) = 0{,}95$ soit $a \approx 3\,158$.

b. Si le site internet possède en stock 3 158 rubans LED d'intérieur, la probabilité qu'il n'y ait pas rupture de stock est supérieure ou égale à 0,95.

Partie C

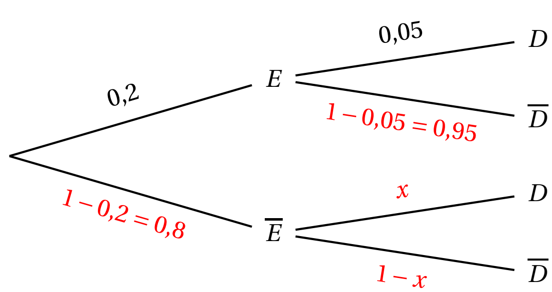
On admet maintenant que :

- 20 % des rubans LED proposés à la vente sont d'extérieur ;
- 5 % des rubans LED d'extérieur sont défectueux.

On prélève au hasard un ruban LED dans le stock.
On appelle :

- E l'évènement : « le ruban LED est d'extérieur » ;
- D l'évènement : « le ruban LED est défectueux ».

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



dans lequel x est un réel compris entre 0 et 1, et représente $P_{\overline{E}}(D)$.

2. « Le ruban LED est d'extérieur et défectueux » est l'évènement $E \cap D$:
$P(E \cap D) = P(E) \times P_E(D) = 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}01$.

3. D'autre part on sait que 6 % de tous les rubans LED sont défectueux, donc $P(D) = 0{,}06$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(D) = P(E \cap D) + P\left(\overline{E} \cap D\right) = P(E \cap D) + P\left(\overline{E}\right) \times P_{\overline{E}}(D) = 0{,}01 + 0{,}8x$.

   On a $P(D) = 0{,}06$ et $P(D) = 0{,}01 + 0{,}8x$, donc $0{,}06 = 0{,}01 + 0{,}8x$ autrement dit $x = \dfrac{0{,}05}{0{,}8}$; donc $x = \dfrac{1}{16}$. Comme x représente $P_{\overline{E}}(D)$ on en déduit que $P_{\overline{E}}(D) = \dfrac{1}{16}$.

   On peut donc dire que, parmi les rubans LED d'intérieur, il y en a $\dfrac{1}{16}$ de défectueux.

Exercice 3 **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Une société propose des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Le directeur de cette société remarque que, chaque année, 14 % des contrats supplémentaires sont souscrits et 7 sont résiliés.
En 2017, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n est le nombre de contrats souscrits l'année $2017+n$.
Ainsi on a $u_0 = 120$.

1. **a.** Chaque année, 14 % des contrats supplémentaires sont souscrits ; augmenter de 14 %, c'est multiplier par 1,14. De plus chaque année, 7 contrats sont résiliés. On passe donc du nombre de contrats de l'année n au nombre de contrats de l'année $n+1$ en multipliant par 1,14 puis en retranchant 7.

   Donc, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1{,}14u_n - 7$.

   b. $2018 = 2017 + 1$ donc le nombre de contrats d'entretien en 2018 est u_1 :
   $u_1 = 1{,}14u_0 - 7 = 1{,}14 \times 120 - 7 \approx 130$.
   On peut estimer à 130 le nombre de contrats d'entretien en 2018.

2. Compte tenu de ses capacités structurelles actuelles, l'entreprise ne peut prendre en charge que 190 contrats. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.
   On cherche donc à savoir en quelle année l'entreprise devra embaucher.

   a. On complète l'algorithme donné dans le texte :

```
n ⟵ 0
u ⟵ 120
Tant que u ⩽ 190
        n ⟵ n + 1
        u ⟵ u × 1,14 − 7
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
```

   b. On utilise la calculatrice pour déterminer les différentes valeurs de u_n (arrondies à l'unité) :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	120	130	141	154	168	185	204

   C'est donc à partir de $n = 6$ que u dépasse 190 ; l'année $2017 + 6 = 2023$ sera donc affichée en fin d'algorithme ; c'est l'année à partir de laquelle l'entreprise aura plus de 190 contrats en charge donc devra embaucher.

3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 50$ pour tout entier naturel n ; donc $u_n = v_n + 50$.

   a. • $v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 1{,}14u_n - 7 - 50 = 1{,}14(v_n + 50) - 57 = 1{,}14v_n + 57 - 57 = 1{,}14v_n$.
   L'égalité $v_{n+1} = 1{,}14v_n$ montre que la (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}14$.

- $v_0 = u_0 - 50 = 120 - 50 = 70$. Le premier terme de la suite géométrique est $v_0 = 70$.

b. La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 70$ et de raison $q = 1{,}14$ donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 70 \times 1{,}14^n$.
Comme $u_n = v_n + 50$, on en déduit que pour tout n, $u_n = 70 \times 1{,}14^n + 50$.

c. On résout l'inéquation $u_n > 190$:

$$\begin{array}{rcll} u_n > 190 & \iff & 70 \times 1{,}14^n + 50 > 190 & \\ & \iff & 70 \times 1{,}14^n > 140 & \\ & \iff & 1{,}14^n > 2 & \\ & \iff & \ln\left(1{,}14^n\right) > \ln(2) & \text{la fonction ln est croissante sur }]0\,;+\infty[\\ & \iff & n\ln(1{,}14) > \ln(2) & \text{propriété de la fonction ln} \\ & \iff & n > \dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}14)} & \end{array}$$

Or $\dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}14)} \approx 5{,}3$ donc $u_n > 190$ pour $n \geqslant 6$.
On retrouve donc l'année $2017 + 6 = 2023$ à partir de laquelle le nombre de contrats d'entretien sera supérieur à 190.

Exercice 3 **5 points**
Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Deux entreprises concurrentes « Alphacopy » et « Bêtacopy » proposent des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Ces deux entreprises se partagent le marché des contrats d'entretien sur un secteur donné.
Le patron de Alphacopy remarque que, chaque année :

- 15 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Alphacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Bêtacopy. Les autres restent fidèles à Alphacopy ;
- 25 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Bêtacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Alphacopy. Les autres restent fidèles à Bêtacopy.

On définit les évènements suivants :

- A : « le client est sous contrat avec l'entreprise Alphacopy » ;
- B : « le client est sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy ».

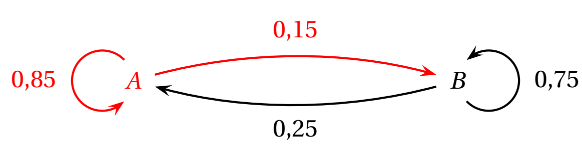
À partir de 2017, on choisit au hasard un client ayant un contrat d'entretien de photocopieurs et on note, pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy l'année $2017 + n$;
- b_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy l'année $2017 + n$

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2017 + n$.
L'objectif de l'entreprise Alphacopy est d'obtenir au moins 62 % des contrats d'entretien des photocopieurs.

Partie A

1. On représente le graphe probabiliste de cette situation en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique :



Ce qui s'exprime sous forme de système : $\left\{\begin{array}{l c l} a_{n+1} & = & 0{,}85\,a_n + 0{,}25\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0{,}15\,a_n + 0{,}75\,b_n \end{array}\right.$

et de matrices : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$

Donc la matrice de transition du système est $M = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$.

2. Soit $P = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$.

- $0{,}625 + 0{,}375 = 1$ donc P est un état du système.
- $P \times M = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$
  $= \begin{pmatrix} 0{,}625 \times 0{,}85 + 0{,}375 \times 0{,}25 & 0{,}625 \times 0{,}15 + 0{,}375 \times 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$

Donc $P = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$ est un état stable du système.

3. L'état stable est l'état limite du système, donc la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy va tendre vers 0,625 soit 62,5 %; l'entreprise Alphacopy va donc dépasser à un moment donné le seuil des 62 % et ainsi atteindre son objectif.

Partie B

En 2017, on sait que 46 % des clients ayant un contrat d'entretien de photocopieurs étaient sous contrat avec l'entreprise Alphacopy. On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 0{,}54 \end{pmatrix}$.

1. On rappelle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.
On a déjà vu que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 0{,}25b_n$.
Or, pour tout n, $a_n + b_n = 1$, donc
$a_{n+1} = 0{,}85a_n + 0{,}25(1 - a_n) = 0{,}85a_n + 0{,}25 - 0{,}25a_n = 0{,}60a_n + 0{,}25$.

2. On cherche à déterminer à l'aide d'un algorithme en quelle année l'entreprise Alphacopy atteindra son objectif.

a. On complète l'algorithme donné dans le texte :

```
n ← 0
a ← 0,46
Tant que a < 0,62
        n ← n + 1
        a ← 0,6 × a + 0,25
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
```

b. On utilise la calculatrice pour déterminer les différentes valeurs de u_n (arrondies à 10^{-3}) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	0,46	0,526	0,566	0,589	0,604	0,612	0,617	0,620

La valeur de n pour laquelle u dépasse 0,62 est 7 donc c'est l'année $2017 + 7 = 2024$ qui s'affiche en sortie d'algorithme.
La société Alphacopy atteindra son objectif la première fois en 2024.

3. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0{,}625$ pour tout entier naturel n; donc $a_n = u_n + 0{,}625$.

a. • $u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}625 = 0{,}60a_n + 0{,}25 - 0{,}625 = 0{,}60(u_n + 0{,}625) - 0{,}375$
$= 0{,}60u_n + 0{,}375 - 0{,}375 = 0{,}60u_n$.

$u_{n+1} = 0{,}60u_n$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}60$.

- $u_0 = a_0 - 0,625 = 0,46 - 0,625 = -0,165$.
  Le premier terme de la suite géométrique est $u_0 = -0,165$.

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -0,165$ et de raison $q = 0,60$.

b. La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -0,165$ et de raison $q = 0,60$ donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = -0,165 \times 0,60^n$.

Comme pour tout n on a $a_n = u_n + 0,625$, on en déduit que pour tout n, on a

$$a_n = -0,165 \times 0,60^n + 0,625.$$

c. On résout l'inéquation $a_n \geqslant 0,62$:

$$\begin{aligned}
a_n \geqslant 0,62 &\iff -0,165 \times 0,60^n + 0,625 \geqslant 0,62 \\
&\iff 0,005 \geqslant 0,165 \times 0,60^n \\
&\iff \frac{0,005}{0,165} \geqslant 0,60^n \\
&\iff \ln\left(\frac{0,005}{0,165}\right) \geqslant \ln\left(0,60^n\right) && \text{la fonction ln est croissante sur }]0\,;\,+\infty[\\
&\iff \ln\left(\frac{0,005}{0,165}\right) \geqslant n\ln(0,60) && \text{propriété de la fonction ln} \\
&\iff \frac{\ln\left(\frac{0,005}{0,165}\right)}{\ln(0,60)} \leqslant n && \text{car } \ln(0,60) < 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{0,005}{0,165}\right)}{\ln(0,60)} \approx 6,85$ donc $n \geqslant 7$.

On retrouve donc l'année $2017 + 7 = 2024$ à partir de laquelle l'entreprise Alphacopy aura atteint plus de 62 % du marché..

Exercice 4 **6 points**

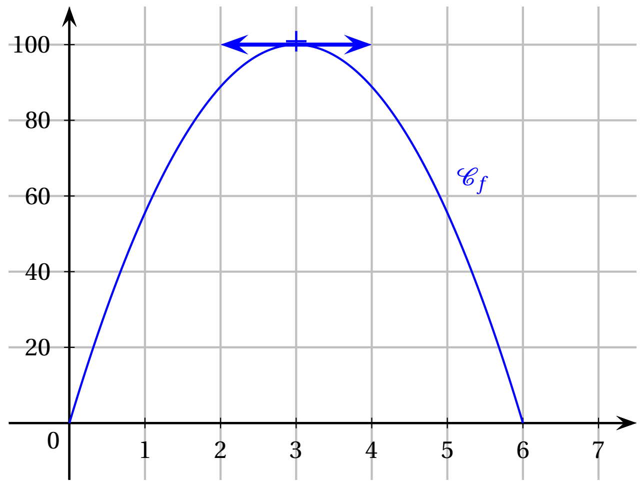
Commun à tous les candidats

On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *saturation* ».

On définit aussi la fonction « *envie* » comme la fonction dérivée de la fonction « *satisfaction* ». On dira qu'il y a « *souhait* » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « *rejet* » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.

Partie A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « *satisfaction* » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heures).



1. Il y a « *saturation* » au bout de 3 heures de travail.
2. Il y a « *rejet* » quand la fonction est décroissante, donc après 3 heures de travail.

Partie B

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « *satisfaction* » g est définie sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ par $g(x) = 12{,}5x\,\mathrm{e}^{-0{,}125x+1}$ (x est exprimé en jour).

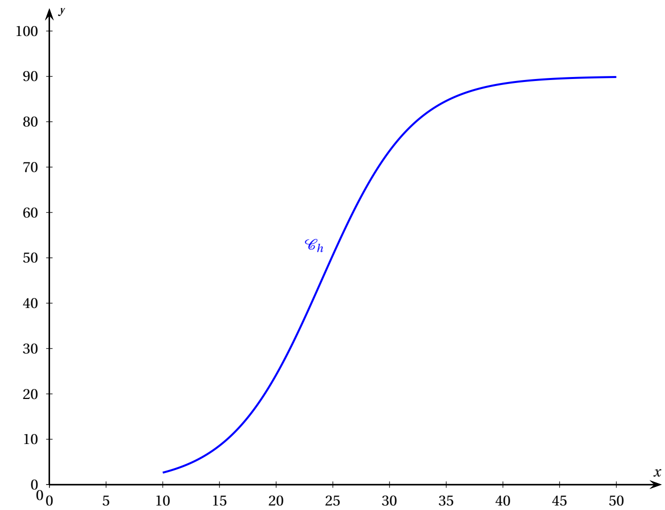
1. Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,30]$:
$g'(x) = 12{,}5 \times \mathrm{e}^{-0{,}125x+1} + 12{,}5x \times (-0{,}125)\,\mathrm{e}^{-0{,}125x+1} = (12{,}5 - 1{,}5625x)\,\mathrm{e}^{-0{,}125x+1}$.
2. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-0{,}125x+1} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $12{,}5 - 1{,}5625x$.
$12{,}5 - 1{,}5625x > 0 \iff 12{,}5 > 1{,}5625x \iff \dfrac{12{,}5}{1{,}5625} > x \iff x < 8$
$g(0) = 0$, $g(8) = 100$ et $g(30) \approx 24$
On établit le tableau des variations de la fonction g sur $[0\,;\,30]$:

x	0		8		30
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	0	$\nearrow$	100	$\searrow$	$f(30)$

3. D'après le tableau de variations, l'effet « *saturation* » apparaît au bout d'un séjour de 8 jours.

Partie C

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « *satisfaction* » h, est définie sur l'intervalle $[10\,;\,50]$ par $h(x) = \dfrac{90}{1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}}$ (x est exprimé en millier d'euros).
La courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h est représentée ci-dessous :



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	`Dériver(90/(1 + exp(-0.25 * x +6)))` $\dfrac{22{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6})^2}$
2	`Dériver(22.5 * exp(-0,25 x + 6)/(1 + exp(-0,25 * x + 6))²` $\dfrac{5{,}625\,\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}(\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6})^3}$

1. D'après le logiciel de calcul formel, $h''(x) = \dfrac{5{,}625\,\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}(\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6})^3}$.

2. On résout dans l'intervalle $[10\,;\,50]$ l'inéquation $\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}-1>0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-0{,}25x+6}-1>0 &\iff \mathrm{e}^{-0{,}25x+6}>1 &&\iff -0{,}25x+6>0\\ &\iff 6>0{,}25x &&\iff \frac{6}{0{,}25}>x\\ &\iff 24>x \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[10\,;\,50]$, l'inéquation $\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}-1>0$ a pour solution l'intervalle $[10\,;\,24[$.

3. La fonction h est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée est croissante, c'est-à-dire quand sa dérivée seconde est positive.

$h''(x) = \dfrac{5{,}625\,\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}(\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6})^3}$

Or pour tout X, $\mathrm{e}^{X}>0$ donc, pour tout x, $\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}>0$; on en déduit que $\left(1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}\right)^3>0$ et que $5{,}625\,\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}>0$, et donc que $h''(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}-1$.

D'après la question précédente, on peut dire que :

- $h''(x)>0$ sur $[10\,;\,24[$ donc la fonction h est convexe sur $[10\,;\,24[$;
- $h''(x)<0$ sur $]24\,;\,50]$ donc la fonction h est concave sur $]24\,;\,50]$.

4. La fonction « *envie* » décroit quand h' décroit donc quand h'' devient négative, soit à partir de $x = 24$, ce qui correspond à un salaire annuel de 24 000 euros.
5. La fonction « *satisfaction* » atteint 80 quand $h(x) = 80$; on résout cette équation :

$$\begin{aligned}
h(x) = 80 &\iff \frac{90}{1+\text{e}^{-0,25x+6}} = 80 \iff 90 = 80\left(1+\text{e}^{-0,25x+6}\right)\\
&\iff \frac{90}{80} = 1+\text{e}^{-0,25x+6} \iff \frac{9}{8} - 1 = \text{e}^{-0,25x+6}\\
&\iff \ln\left(\frac{1}{8}\right) = -0,25x+6 \iff 0,25x = 6 - \ln\left(\frac{1}{8}\right)\\
&\iff x = \frac{6+\ln(8)}{0,25}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{6+\ln(8)}{0,25} \approx 32,3$ donc on peut dire que la fonction « *satisfaction* » atteint 80 pour un salaire annuel d'environ 32 000 euros.