Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Nord
27 mai 2014

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

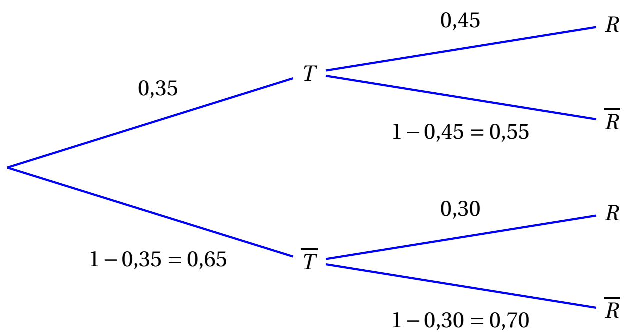
1. **Réponse b.**
   La courbe représentative de f est située au dessus de l'axe des abscisses ; la fonction f est donc positive sur $[-5\,;\,5]$.
2. **Réponse c.**
   La courbe $\mathscr{C}$ admet en 0 une tangente horizontale donc $f'(0) = 0$.
3. **Réponse c.**
   Le nombre dérivé de f en 4 est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 4 ; on a donc $f'(4) = -\dfrac{1}{e^2}$.
4. **Réponse c.**
   Le nombre A est l'aire sous la courbe entre -2 et 2 ; cette aire est comprise entre 3 et 4 unités d'aires.

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. L'arbre pondéré décrivant la situation est :



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(R) = P(R \cap T) + P(R \cap \overline{T}) = 0{,}35 \times 0{,}45 + 0{,}65 \times 0{,}3 = 0{,}3525$$

   La probabilité qu'un appartement loué soit rentable est bien égale à 0,352 5.
3. La probabilité que l'appartement soit de type T1 ou T2 sachant qu'il est rentable est $P_R(T)$.

$$P_R(T) = \frac{P(R \cap T)}{P(R)} = \frac{0{,}35 \times 0{,}45}{0{,}3525} \approx 0{,}4468$$

Partie B

La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 35$ et d'écart type $\sigma = 5$.

1. À la calculatrice, on trouve : $P(25 \leqslant X \leqslant 35) \approx 0{,}4772$.
2. La probabilité qu'au moins 45 appartements parmi les 100 appartements loués soient rentables est $P(X \geqslant 45) \approx 0{,}0228$.

Partie C

1. La fréquence d'appartements rentables dans l'échantillon est $\dfrac{120}{280} \approx 0{,}428\,6$.
2. On suppose que l'affirmation du responsable de l'agence est vraie. On calcule l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour un échantillon de 280 dossiers.
   Les conditions pour calculer l'intervalle de fluctuation asymptotique sont remplies car
   $$n = 280 \geqslant 30,\ np = 168 \geqslant 5 \text{ et } n(1-p) = 112 \geqslant 5$$
   Les bornes de l'intervalle sont :
   $$p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}6 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4}}{\sqrt{280}} \approx 0{,}542\,61$$
   $$p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}6 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4}}{\sqrt{280}} \approx 0{,}657\,38$$
   L'intervalle de fluctuation asymptotique est donc $[0{,}542\,6\,;\,0{,}657\,4]$.
   On constate que la fréquence observée 0,428 6 n'appartient pas à cet intervalle.
   On rejette donc l'affirmation du responsable de cette agence.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. La valeur demandée correspond à l'image de 8 ; elle peut être estimée à 97 secondes.
   La durée de chargement pour 8 000 personnes connectées est donc d'environ 97 secondes.
2. **a.** Un antécédent de 15 par f est à peu près égal à 2.
   b. Lorsque le durée de téléchargement est de 15 secondes, il y a environ 2 000 personnes connectées.

Partie B

La fonction g est définie sur $[0{,}5\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 10x - 8\ln(x)$.

1. **a.** Sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,+\infty[$, $g'(x) = 10 - \dfrac{8}{x}$.
   b. On étudie le signe de g' sur $[0{,}5\,;\,+\infty[$: $10 - \dfrac{8}{x} > 0 \iff 10 > \dfrac{8}{x} \iff 10x > 8 \iff x > 0{,}8$
   On en déduit le tableau de signe de g' et les variations de g :

x	$0{,}5$		$0{,}8$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$5+8\ln 2$	↘	$8-8\ln 0{,}8$	↗	

2. La fonction G est définie sur $[0{,}5\,;\,+\infty[$ par $G(x) = 5x^2 + 8x - 8x\ln(x)$.
   On calcule la dérivée de G sur $[0{,}5\,;\,+\infty[$:
   $G'(x) = 10x + 8 - 8\ln(x) - 8x\dfrac{1}{x} = 10x + 8 - 8\ln(x) - 8 = 10x - 8\ln(x) = g(x)$
   G est donc une primitive de g sur $[0{,}5\,;\,+\infty[$.
3. On pose $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 g(x)\,\mathrm{d}x$.

a. $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(G(4) - G(2)\right) = \dfrac{1}{2}\left((80+32-32\ln 4) - (20+16-16\ln 2)\right)$

$= \dfrac{1}{2}(112 - 64\ln 2 - 36 + 16\ln 2) = 38 - 24\ln 2$

b. $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4-2}\displaystyle\int_2^4 g(x)\,\mathrm{d}x$

I est donc la valeur moyenne de la fonction g entre 2 et 4. De plus $I \approx 21{,}36$.

On peut donc dire que lorsque le nombre de connectés est compris entre 2 000 et 4 000, la durée du téléchargement est en moyenne proche de 21 secondes.

Partie C

On a vu dans la partie A qu'avec le modèle exponentiel, la durée de chargement pour 8 000 connectés serait d'environ 97 secondes.
$g(8) = 80 - 8\ln 8 \approx 63$. Avec le modèle logarithmique, on aurait environ 63 secondes de temps de téléchargement.
On constate que le modèle exponentiel est plus proche de la réalité pour cette valeur.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de la spécialité et candidats de la série L

1. **a.** $0{,}95 \times 50\,000 = 47\,500$

   En 2014, il restera 95 % des arbres de 2013, soit 47 500 arbres.

   On replante 3 000 arbres. Il y a donc $47\,500 + 3\,000 = 50\,500$ arbres en 2014.

   b. En 2013, il y a 50 000 arbres ; on a donc bien $u_0 = 50\,000$.

   Chaque année, on ne conserve que 95 % des arbres de l'année précédente.

   L'année $2013 + (n+1)$, le nombre d'arbres conservé est donc $0{,}95u_n$.

   En ajoutant les 3 000 nouveaux arbres, on a donc, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3\,000$.

2. On considère la suite v définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $v_n = 60\,000 - u_n$; donc $u_n = 60\,000 - v_n$.

   a. Pour tout entier naturel n,

   $v_{n+1} = 60\,000 - u_{n+1} = 60\,000 - (0{,}95u_n + 3\,000) = 57\,000 - 0{,}95u_n$

   $= 57\,000 - 0{,}95 \times (60\,000 - v_n) = 57\,000 - 57\,000 + 0{,}95v_n$

   $= 0{,}95v_n$

   $v_0 = 60\,000 - u_0 = 60\,000 - 50\,000 = 10\,000$

   (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de premier terme $v_0 = 10\,000$.

   b. Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 10\,000 \times 0{,}95^n$.

   c. Pour tout entier naturel n, $u_n = 60\,000 - v_n = 60\,000 - 10\,000 \times 0{,}95^n = 10\,000\,(6 - 0{,}95^n)$

   d. Comme $-1 < 0{,}95 < 1$, on peut dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}95^n = 0$.

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(6 - 0{,}95^n\right) = 6$ et donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 60\,000$.

   e. Au fil des années, le nombre d'arbres dans cette forêt s'approchera de 60 000.

3. **a.** On résout l'inéquation $u_n \geqslant 57\,000$:

   $$\begin{aligned} u_n \geqslant 57\,000 &\iff 10\,000\,(6 - 0{,}95^n) \geqslant 57\,000 \\ &\iff 6 - 0{,}95^n \geqslant 5{,}7 \\ &\iff 0{,}3 \geqslant 0{,}95^n \\ &\iff \ln 0{,}3 \geqslant n \ln 0{,}95 && \text{(la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\text{)} \\ &\iff \frac{\ln 0{,}3}{\ln 0{,}95} \leqslant n && (\ln 0{,}95 < 0) \end{aligned}$$

   $\dfrac{\ln 0{,}3}{\ln 0{,}95} \approx 23{,}47$ donc

   les solutions de l'inéquation sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 24.

   b. $2013 + 24 = 2037$ donc à partir de 2037, le nombre d'arbres sera supérieur à 57 000.

4. **a.** Le premier et le deuxième algorithme ne conviennent pas car ils affichent un seul nombre alors qu'on attend plusieurs valeurs de la suite ; l'instruction « Afficher » doit obligatoirement se trouver dans une boucle.

Le troisième algorithme convient. Il commence par demander la valeur de n à l'utilisateur, puis il affiche u_0 puis les $n-1$ valeurs suivantes de la suite. L'instruction « Afficher » qui se trouve en dehors de la boucle permet d'afficher la dernière valeur calculée u_n.

b. On retrouve avec l'algorithme 1 le résultat de la question 3 ; c'est à l'issue de la 24$^{\text{e}}$ année que le nombre d'arbres dans la forêt aura atteint 57 000.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Dans le graphe $\mathscr{G}$ donné dans le texte :

a. les sommets A et C ne sont pas reliés par une arête, donc le graphe $\mathscr{G}$ n'est pas complet ;

b. il existe un chemin reliant deux sommets quelconques, donc le graphe $\mathscr{G}$ est connexe.

2. **a.** Déterminons les degrés de chaque sommet :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	2	3	4	3	4	2	4	4

Il y a exactement deux sommets de degrés impairs, B et D, donc le graphe $\mathscr{G}$ admet un chemin eulérien, c'est-à-dire un chemin qui part d'un des sommets de degré impair, qui passe une fois et une seule par chaque arête, et qui arrive à l'autre sommet de degré impair.

b. Exemple de trajet empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute :

B – A – D – E – B – C – E – G – C – H – F – G – H – D

3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathscr{G}$ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).

a. La matrice d'adjacence M associée au graphe est une matrice carrée d'ordre 8, ne contenant que des 0 et des 1. Si une arête relie le sommet numéro i $(1 \leqslant i \leqslant 8)$ au sommet numéro j $(1 \leqslant j \leqslant 8)$, on mettra un 1 à la ligne i et la colonne j de la matrice ; sinon on mettra un 0.

Donc la matrice d'adjacence est $M = \begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&1&1&0 \end{pmatrix}$

b. On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0&5&3&5&1&1&4&1\\ 5&2&7&2&8&3&3&5\\ 3&7&6&4&9&3&9&10\\ 5&2&4&0&9&2&3&8\\ 1&8&9&9&4&4&10&4\\ 1&3&3&2&4&2&6&6\\ 4&3&9&3&10&6&6&9\\ 1&5&10&8&4&6&9&4 \end{pmatrix}$$

La matrice M^3 donne le nombre de chemins de longueur 3 entre tous les sommets. Le sommet E est le numéro 5, le sommet H le numéro 8 ; le nombre de chemins de longueur 3 allant de E à H est le nombre situé dans la matrice à la ligne 5 et la colonne 8.

Il y a donc 4 chemins de longueur 3 allant de E vers H.

Ces chemins sont : E – B – C – H ; E – C – G – H ; E – G – F – H et E – G – C – H.

Partie B

Le graphe $\mathcal{G}$ est complété par des distances kilométriques entre les sommets.
On détermine, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F :

A	B	C	D	E	F	G	H	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	400 (A)	∞	600 (A)	∞	∞	∞	∞	B (A)
		1000 (B)	600 (A)	800 (B)	∞	∞	∞	D (A)
		1000 (B)		800 (B) ~~900 (D)~~	∞	∞	1 500 (D)	E (B)
		1 000 (B) ~~1 150 (E)~~			∞	1 400 (E)	1 500 (D)	C (B)
					∞	1 400 (E) ~~1 550 (C)~~	1 450 (C)	G (E)
					1 600 (G)		~~1 750 (G)~~	H(C)
					1 600 (G)			F(G)

Le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F est : A $\xrightarrow{400}$ B $\xrightarrow{400}$ E $\xrightarrow{600}$ G $\xrightarrow{200}$ F

Ce trajet a une longueur totale de 1 600 kilomètres.