Corrigé ES Amérique du Nord 2 juin 2015

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 0,95 vaut $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, ici $f=\dfrac{484}{4000}=0,121$ et $n=4\,000$.

   L'intervalle vaut donc : $\left[0,121-\dfrac{1}{\sqrt{4\,000}}\ ;\ 0,121+\dfrac{1}{\sqrt{4\,000}}\right]$. Soit encore : [0,105 ; 0,137]. **C'est la réponse c)**

2. L'amplitude de l'intervalle $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ vaut $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

   $\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0,01 \Leftrightarrow \sqrt{n}=\dfrac{2}{0,01} \Leftrightarrow n=200^2 \Leftrightarrow n=40000$. **C'est la réponse d)**

Partie B

X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$ avec $\mu=32$ et $\sigma=13$.

1. $\mathbb{P}(19\leqslant X\leqslant 45)=\mathbb{P}(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant \mu+\sigma)\approx 0,68$. C'est un résultat de cours.

   C'est la réponse b)

2. Ici, nous utilisons la calculatrice : $\mathbb{P}(X\leqslant t)=0,9$ revient à introduire sur la calculatrice : invNorm(0.9,32,13).

   Arrondi à l'entier c'est 49 s. **C'est la réponse c)**

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

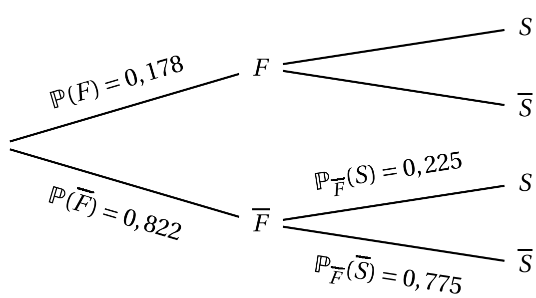
Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, $\mathbb{P}(S)=0,203$, en effet 20,3% des élèves sont inscrits à l'association sportive.

   De plus, parmi les élèves non fumeurs, 22,5 % sont inscrits à l'association sportive. Ainsi $\mathbb{P}_{\overline{F}}(S)=0,225$

   Comme : $\mathbb{P}_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)=1-\mathbb{P}_{\overline{F}}(S)=0,775$.

2. On en déduit l'arbre de probabilité :



3. $\mathbb{P}\left(\overline{F}\cap S\right)=\mathbb{P}_{\overline{F}}(S)\times\mathbb{P}\left(\overline{F}\right)=0,225\times 0,822=0,18495\approx 0,185$.

   18,5 % environ des élèves sont non fumeurs et inscrits dans une association sportive.

4. Ici on calcule : $\mathbb{P}_S\left(\overline{F}\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(\overline{F}\cap S\right)}{\mathbb{P}(S)} = \dfrac{0{,}18495}{0{,}203} \approx 0{,}911$

5. En utilisant la formule des probabilités totales :

$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}\left(\overline{F}\cap S\right) + \mathbb{P}(F\cap S) \iff 0{,}203 = 0{,}18495 + \mathbb{P}(F\cap S) \iff \mathbb{P}(F\cap S) = 0{,}203 - 0{,}18495 = 0{,}01805.$

Or : $\mathbb{P}_F(S) = \dfrac{\mathbb{P}(F\cap S)}{\mathbb{P}(F)} = \dfrac{0{,}01805}{0{,}178} = 0{,}10140449 \approx 0{,}101.$

Partie B

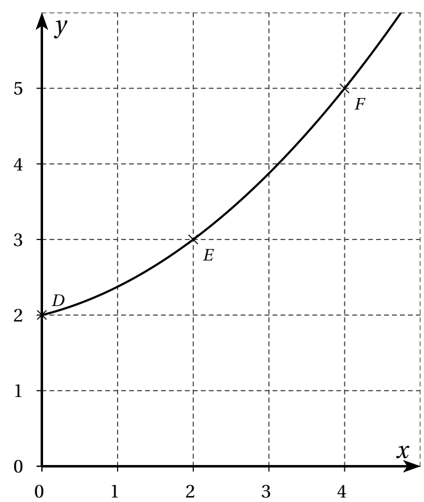
Nous sommes dans le cas d'une épreuve de Bernoulli.
Nous répétons cette expérience de manière indépendante avec remise, nous sommes dans le cas d'un schéma de Bernoulli (On admet que le nombre d'élèves est suffisamment grand pour que cette situation soit assimilée à un tirage avec remise).
Comme X est une variable aléatoire comptant le nombre d'élèves gagnants, nous pouvons assimiler cette loi à une loi binomiale : $X = \mathcal{B}(n, p)$, où $n = 4$ et $p = 0{,}203$.
Ici on calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant 1) &= 1 - \mathbb{P}(X < 1)\\
&= 1 - \mathbb{P}(X = 0)\\
&= 1 - \binom{4}{0} \times 0{,}203^0 \times (1 - 0{,}203)^4\\
&= 1 - (1 - 0{,}203)^4\\
&\approx 0{,}597
\end{aligned}$$

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A



1. a.
- en 2000, $x = 0$, et $f(0) = 2$ centaine.
  Soit encore : $a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 \iff c = 1.$
- en 2012, $x = 2$, et $f(2) = 3$ centaines.
  Soit encore : $a \times 2^2 + b \times 2 + c = 1 \iff 4a + 2b + c = 3.$
- en 2014, $x = 4$, et $f(4) = 5$ centaines.
  Soit encore : $a \times 4^2 + b \times 4 + c = 1 \iff 16a + 4b + c = 5.$

On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} c=2\\ 4a+2b+c=3\\ 16a+4b+c=5\end{cases}$$

b. $\begin{cases} c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 16a+4b+c=5 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} c \\ 4\,a+2\,b+c \\ 16\,a+4\,b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow MX = R$

Avec : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. Comme M est inversible :
$MX = R \iff X = M^{-1} \times R$
Soit encore : $X = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On obtient : $X = \begin{pmatrix} 0,125 \\ 0,25 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ainsi : $f(x) = \dfrac{1}{8}\,x^2 + \dfrac{1}{4}\,x + 2$.

3. En 2 016, $x = 6$ et $f(6) = \dfrac{1}{8} \times 6^2 + \dfrac{1}{4} \times 6 + 2 = 8$.

Il y aura 800 agences de services à domicile.

Partie B

1. **a.** Ce graphe est connexe en effet la chaîne suivante relie tous les sommets :
A-B-E-F-J-K-P-O-M-N-J-I-M-L-H-G-C-D.

b. Ce graphe n'est pas complet en effet : H et I ne sont pas adjacents, par exemple.

2. Pour les deux questions dressons, le tableau des sommets et de leur degré :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Degré	2	2	2	4	4	2	2	3	3	4	2	2	4	2	2	2

Comme, ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue, nous sommes alors à la recherche d'un cycle eulérien ou d'une chaîne eulérienne.

Le graphe étant connexe (vu précédemment), et comme nous avons deux sommets de degré impair. Ce graphe admet donc une chaîne eulérienne et non un cycle eulérien (théorème d'Euler).

a. Comme ce graphe n'admet pas de cycle, le point de départ et de fin ne peuvent être identiques.

b. Ce graphe admet une chaîne eulérienne, un circuit ou le point de départ et le point d'arrivée ne sont pas les mêmes et donc possible en passant une seule fois par chaque rue.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** De 2004 à 2005, la population de singes baisse de 15 %, au premier janvier 2 005, l'effectif sera de : $u_1 = 25\,000 \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 21\,250$.

b. De 2005 à 2006, la population de singes baisse de 15 %, au premier janvier 2005, l'effectif sera de :
$u_2 = 21\,250 \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 18\,062{,}5 \approx 18\,063$.

2. Pour passer d'une année à une autre : $u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right)$.

C'est une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $u_0 = 25\,000$.

Le terme général de (u_n) est : $u_n = u_0 \times q^n$, soit encore : $u_n = 25\,000 \times 0,85^n$.

3. Algorithme modifié :

L1 :	Variables	u un réel, n un entier
L2 :	Initialisation	u prend la valeur 25 000
L3 :		n prend la valeur 0
L4 :	Traitement	Tant que $u \geqslant 5\,000$ faire
L5 :		u prend la valeur $u * 0,85$
L6 :		n prend la valeur $n+1$
L7 :		Fin Tant que
L8 :	Sortie	Afficher n

4. Classiquement :

$$\begin{aligned}
u_n < 5000 \quad &\Leftrightarrow \quad 25\,000 \times 0,85^n < 5000\\
&\Leftrightarrow \quad 0,85^n < \frac{5\,000}{25\,000}\\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left(0,85^n\right) < \ln\left(\frac{5\,000}{25\,000}\right) \quad \text{(en effet : } a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b\text{)}\\
&\Leftrightarrow \quad n \ln(0,85) < \ln\left(\frac{5\,000}{25\,000}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln\left(\dfrac{5\,000}{25\,000}\right)}{\ln(0,85)} \quad \text{(car : } \ln 0,85 < 0\text{)}\\
&\Leftrightarrow \quad n > 9,903\,1\\
&\Leftrightarrow \quad n \geqslant 10
\end{aligned}$$

Partie B

1. **a.** Chaque année $\dfrac{1}{4}$ des singes disparaissent, il reste donc $v_0 \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)$ auquel 400 naissances se rajoutent.

On en déduit que : $v_1 = v_0 \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) + 400 = 5000 \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) + 400 = 4\,150$.

De même : $v_2 = v_1 \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) + 400 = 4150 \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) + 400 = 3\,512,5 \approx 3\,513$.

b. Chaque année $\dfrac{1}{4}$ des singes disparaissent, il reste donc $v_n \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)$ auquel 400 naissances se rajoutent.

$v_{n+1} = v_n \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) + 400$.

Ainsi : $v_{n+1} = 0,75 v_n + 400$.

2. **a.** $w_{n+1} = v_{n+1} - 1\,600 = 0,75 v_n + 400 - 1\,600 = 0,75 v_n - 1\,200 = 0,75\,(v_n - 1600) = 0,75 w_n$.
(w_n) est géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme : $w_0 = v_0 - 1\,600 = 5\,000 - 1\,600 = 3\,400$.

b. (w_n) étant géométrique de premier terme $w_0 = 3\,400$, son terme général vaut :
$w_n = w_0 \times q^n$, ainsi $w_n = 3\,400 \times 0,75^n$.

c. Comme : $w_n = v_n - 1600 \Rightarrow v_n = w_n + 1600$.
Ainsi : $v_n = 1600 + 3\,400 \times 0,75^n$.

d. $v_n = a_n + b_n \times c_n$ avec :

- $a_n = 1600$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1600$
- $b_n = 3400$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 3400$
- $c_n = 0,75^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0^+$, car c_n est de la forme q^n avec $q \in]0~;~1[$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1600$. Ceci signifie qu'à terme la population de singes va se rapprocher de 1 600. On a par exemple $v_{20} \approx 1611$.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Au point d'abscisse 5 la tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale, $f'(5) = 0$.
   Au point d'abscisse 0 la tangente à $\mathcal{C}_f$ est la droite (AB), $f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{10}{2} = 5$.

2. Comme D est un point d'inflexion, l'ensemble des tangentes à $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de $\mathcal{C}_f$, elle est concave sur $[0~;~10]$, sur $[10~;~+\infty[$, l'ensemble des tangentes à $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessous de $\mathcal{C}_f$, elle est convexe sur cet intervalle.

Partie B

1. f est dérivable sur $[0\,;\,18]$ en tant que produit de fonctions dérivables :

$$f'(x) = 5 \times \mathrm{e}^{-0,2x} + 5x \times \underbrace{\mathrm{e}^{-0,2x}}_{\mathrm{e}^{u(x)}} \overbrace{\times(-0,2)}^{\times u'(x)} = 5\mathrm{e}^{-0,2x} - x\mathrm{e}^{-0,2x} = (5-x)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$, le signe ne dépend donc que de : $5 - x$. On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f.

x	0		5		18
$5-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$25\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$90\mathrm{e}^{-\frac{18}{5}}$

3. D'après le tableau de variations, au bout de 5 jours le nombre maximal de jouets est atteint est vaut :
$f(5) \approx 9,197$ milliers. Cela fait 9 197 jouets.

Partie C

1. **a.** $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{10} = F(10) - F(0) = -375\mathrm{e}^2 - (-125) = -375\mathrm{e}^{-2} + 125 \approx 74,249.$

   b. Le nombre moyen est donné par : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

   Soit encore : $\mu = \dfrac{1}{10-0}\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 7,425$ milliers de jouets. Soit encore 7 425 jouets en moyenne.

2. Le logiciel de calcul formel nous donne : $f''(x) = \dfrac{x-10}{5}\mathrm{e}^{-0,2x}$.
On en déduit le tableau de signes de $f''(x)$ et tableau de variations de f' :

x	0		10		18
$x-10$		$-$	0	$+$	
5		$+$		$+$	
$\mathrm{e}^{-0,2x}$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$		$\nearrow$	5

- f' est décroissante sur $[0\,;\,10]$, f est donc concave sur cet intervalle.
- f' est croissante sur $[10\,;\,18]$, f est donc convexe sur cet intervalle.

Comme $f(x)$ est définie pour $x = 10$, la fonction admet un point d'inflexion au point d'abscisse 10.