∽ Baccalauréat ES Centres étrangers ∾
13 juin 2012

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. La fonction g est définie sur l'intervalle :
   La fonction g est définie quand $f(x) > 0$, donc sur $]-2\ ;\ 5[$. Réponse **a.**
2. Le nombre $g(1)$ est égal à :
   $g(1) = \ln[f(1)] = \ln \frac{7}{2} = \ln 7 - \ln 2$. Réponse **b.**
3. On note f' la fonction dérivée de f, le nombre $f'(1)$ est égal à :
   Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente en C, coefficient qui vaut $\dfrac{-3,5}{5} = \dfrac{-7}{10} = -0,7$. Réponse **c.**
4. On note h' la fonction dérivée de h, le nombre $h'(0)$ est égal à :
   On a quel que soit x, $\quad h'(x) = f'(x) \times \text{e}^{f(x)}$, donc $h'(0) = f'(0) \times \text{e}^{f(0)}$. Or $f'(0) = 0$ (tangente en B horizontale. Donc $h'(0) = 0$. Réponse **b.**

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. Le taux d'évolution de la proportion de bacheliers ayant obtenu une mention au baccalauréat ES entre 2002 et 2009 est égal à $\dfrac{44,1 - 25,5}{25,5} \approx 73\,\%$.
2. **a)** 2012 correspond au rang 10 ; donc $y_{10} = 2,73 \times 10 + 25,47 = 27,3 + 25,47 = 52,77\,\%$.

   b) Il faut résoudre l'inéquation :

   $2,73x + 25,47 > 60 \iff 2,73x > 34,53 \iff x > \dfrac{34,53}{2,73} \approx 12,6$.

   Il faut attendre le rang 13 soit en 2015.

3. **a)**

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$	3,239	3,353	3,401	3,500	3,606	3,714	3,716	3,786

   b) La calculatrice donne $z = 0,08x + 3,26$ (coefficients arrondis à 0,01 près).

   c) On a $z = \ln y = 0,08x+3,26 \iff y = \text{e}^{0,08x+3,26} = \text{e}^{3,26} \times \text{e}^{0,08x} = \text{e}^{3,26} \times \left(\text{e}^{0,08}\right)^x = y = 26,05 \times 1,08\text{e}^x$.

$$y = 26,05 \times 1,08\text{e}^x.$$

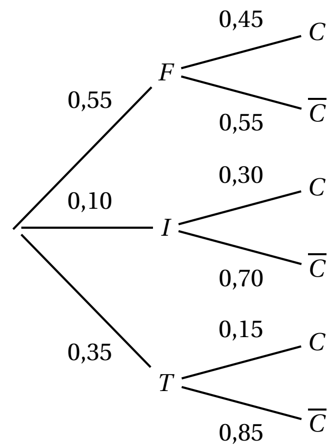
   d) Avec cet ajustement exponentiel en 2012 qui correspond au rang 10, on trouve un pourcentagege de :

$$26,05 \times 1,08^{10} \approx 56,24\,\%.$$

   En 2012 selon ce modèle la proportion de bacheliers susceptibles d'obtenir une mention au baccalauréat ES sera d'environ 56,2 %.

Exercice 3 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.



2. **a)** $F \cap C$ désigne l'évènement : « L'ancien élève poursuit ses études en faculté et vit en colocation ».

$p(F \cap C) = 0,55 \times 0,45 = 0,2475$.

b) D'après la loi des probabilités totales on a :

$p(C) = p(F \cap C) + p(I \cap C) + p(T \cap C) = 0,2475 + 0,10 \times 0,30 + 0,35 \times 0,15 = 0,2475 + 0,03 + 0,0525 = 0,33$.

3. Il faut calculer :

$p_C(I) = \dfrac{p(C \cap F)}{p(C)} = \dfrac{0,2475}{0,33} = 0,75$.

4. On a vu que $p(C) = 0,33$, donc $p\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,33 = 0,67$.

Parmi ceux-ci ceux qui ne poursuivent pas leurs études ont une probabilité de :

$p\left(T \cap \overline{C}\right) = 0,35 \times 0,85 = 0,2975$.

La probabilité de trouver un ancien élève qui n'est pas en colocation et qui poursuit ses études est donc égale à $0,67 - 0,2975 = 0,3725$ qui représente plus de la moitié de 0,37.

L'affirmation est donc exacte.

5. On a donc une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p(C) = 0,33$.

Le contraire de l'évènement « au moins un des trois vit en colocation » est l'événement « aucun des trois ne vit en colocation » de probabilité $0,67^3 = 0,300763$.

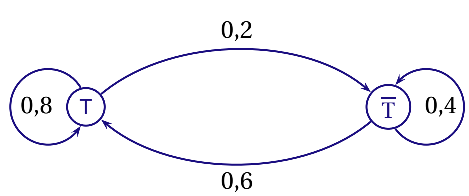
La probabilité pour qu'au moins un des anciens élèves vive en colocation est donc égale à $1 - 0,300763 \approx 0,70$.

Exercice 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

1.



2. La matrice de transition M vérifie $P_{n+1} = P_n \times M$, avec $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

3. $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.

PARTIE B

1. a) $P_{n+1} = P_n\text{M} \iff \begin{pmatrix}p_{n+1} & q_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_n & q_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,6 & 0,4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,8p_n + 0,6q_n & 0,2p_n + 0,4q_n\end{pmatrix}$. Conclusion : pour t

b) d) $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75 = 0,2p_n + 0,6 - 0,75 = 0,2p_n - 0,15 = 0,2\left(p_n - \frac{0,15}{0,2}\right) = 0,2\left(p_n - \frac{3}{4}\right) = 0,2\left(p_n - 0,75\right) = 0,2u_n$.

L'égalité $u_n + 1 = 0,2u_n$ montre que la suite $((u_n)$ est une suite géométrique de raison $0,2$. Son premier terme est $u_1 = p_1 - 0,75 = 0,5 - 0,75 = -0,25$.

On sait qu'alors pour $n \geqslant 1$, $\text{u}_n = -0,25 \times 0,2^{n-1}$.

e) Comme $0 < 0,2 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = u_n + 0,75 = 0,75$.

La suite (u_n) converge vers $0,75 = \dfrac{3}{4}$.

f) Le dernier résultat montre que à partir d'un grand nombre de tentatives, Basile réussira à peu près 3 transformations sur 4 tentatives.

Exercice 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. On dérive le produit :

$f'(x) = a\text{e}^{-x} + (ax+b) \times (-1)\text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}(a - ax - b) = (-ax + a - b)\text{e}^{-x}$.

2. $\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1\\ f'(0) & = & 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & 1\\ a-b & = & 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & 1\\ a & = & 4\end{array}\right.$

Conclusion Pour tout réel x, , f(x) = (4x + 1)e^{-x}.

PARTIE B

1. On sait que $\lim\limits_{n\to-\infty}(4x+1) = -\infty$ et que $\lim\limits_{n\to-\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites :

$\lim\limits_{n\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. On a $f(x) = 4x\text{e}^{-x} + \text{e}^{-x} =$

Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\text{e}^x} = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{\text{e}^x} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 0$

3. On a vu que $f'(x) = (a - b - ax)\text{e}^{-x} = (4 - 1 - 4x)\text{e}^{-x} = (3 - 4x)\text{e}^{-x}$.

Comme $\text{e}^{-x} > 0$ quel que soit x, le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - 4x$.

Or $3 - 4x > 0 \iff 3 > 4x \iff \dfrac{3}{4} > x \iff x < \dfrac{3}{4}$ et de même

$3 - 4x < 0 \iff 3 < 4x \iff \dfrac{3}{4} < x \iff x > \dfrac{3}{4}$.

Conclusion : f est croissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{4}\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$.

PARTIE C

1. On a vu que f était croissante puis décroissante, donc $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$ est le maximum de f.

$f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \left(4 \times \frac{3}{4} + 1\right)\text{e}^{-\frac{3}{4}} = 4\text{e}^{-\frac{3}{4}} \approx 1{,}8894$ millier d'euros soit environ 1 889 € pour une production de 75 objets.

2. On a $F'(x) = -4\text{e}^{-x} - (-4x - 5)\text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}(-4 + 4x + 5) = (4x+1)\text{e}^{-x} = f(x)$.

F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. a) $\dfrac{1}{5}\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\text{d}x = \dfrac{1}{5}\left[F(x)\right]_0^5 = \dfrac{1}{5}[F(5) - F(0)] = \dfrac{1}{5}\left[25\text{e}^{-5} + 5\text{e}^0\right] = 1 - 5\text{e}^{-5} \approx 0{,}9963$ soit 0,996 au millième près c'est-à-dire 996 €.

b) Le résultat précédent représente le coût de production moyen pour une production comprise entre 0 et 500 objets.