Durée : 3 heures

∾ Corrigé du baccalauréat ES Centres étrangers ∾ 15 juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$ donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\text{e}^{-x} = -\infty$.
2. On a sur I, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} < 0$ car le numérateur est négatif et le dénominateur positif ; la dérivée est négative : la fonction f est strictement décroissante sur I.
3. $2\ln x - 1 > 1 \iff 2\ln x > 2 \iff \ln x > 1 \iff \text{e}^{\ln x} > \text{e}^1 \iff x > \text{e}$; l'ensemble des solutions est $]\text{e}~;~+\infty[$.
4. Posons $X = \text{e}^x$, alors l'équation s'écrit :
$X^2 + 2X - 3 = 0$. On a $\Delta = 4 - 12 = 16 = 4^2$; il y a deux solutions :
$X_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$.
On a donc $X_1 = 1 = \text{e}^x \iff x = 0$ ou $X_2 = -3 = \text{e}^x$ qui n'a pas de solution. Il y a une seule solution : 0.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Première partie

1. On sait que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) \iff p(A\cap B) = p(A) + p(B) - p(A\cup B) = 0,2 + 0,1 - 0,25 = 0,05$.
2. On a $p(A\cap B) = 0,05$ et $p(A)\times p(B) = 0,2\times 0,1 = 0,02$.
$p(A\cap B) \neq p(A)\times p(B)$: les évènements A et B ne sont pas indépendants.
3. La probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la collection ne présente aucun des deux défauts est $p\left(\overline{A\cup B}\right) = 1 - p(A\cup B) = 1 - 0,25 = 0,75$.
4. Il faut trouver $p_B(A) = \dfrac{p(B\cap A)}{p(B)} = \dfrac{0,05}{0,10} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.
5. Il faut trouver $p_{\overline{B}}(A) = \dfrac{p\left(\overline{B}\cap A\right)}{p\left(\overline{B}\right)}$.
Or d'après la loi des probabilités totales :
$p(A) = p(A\cap B) + p\left(A\cap\overline{B}\right) \iff p\left(A\cap\overline{B}\right) = p(A) - p(A\cap B) = 0,2 - 0,05 = 0,15$.
Donc $p_{\overline{B}}(A) = \dfrac{0,15}{1-0,1} = \dfrac{0,15}{0,9} = \dfrac{15}{90} = \dfrac{1}{6} \approx 0,17$ au centième près.

Deuxième partie

1. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = p\left(\overline{A\cup B}\right) = 0,75$.
Donc la probabilité qu'une seule des pièces soit sans défaut est :
$3\times 0,75\times(1-0,75)^2 = 2,25\times 0,0625 = 0,140\,625 \approx 0,14$.

2. La probabilité qu'aucune des trois pièces n'ait de défaut est $0,75^3$, donc la probabilité qu'au moins une des trois pièces soit sans défaut est égale à $1-0,75^3=0,578\,128\approx 0,58$.

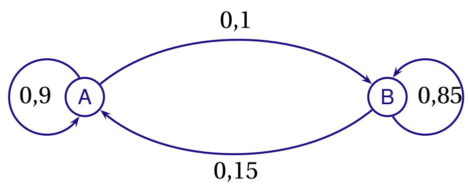
EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Première partie

1. On a au départ $P_0=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix}$.

2.



3. On admet que $M=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\0,15 & 0,85\end{pmatrix}$.

On sait que $P_2=P_0\times M^2$; or

$M^2=\begin{pmatrix}0,825 & 0,175\\0,2625 & 0,7375\end{pmatrix}$, donc

$P_2=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,825 & 0,175\\0,2625 & 0,7375\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,54375 & 0,45625\end{pmatrix}$ soit $M\approx\begin{pmatrix}0,54 & 0,46\end{pmatrix}$ en arrondissant au centième.

4. Les coefficients de la matrice de transition ne sont pas nuls, donc la matrice P_n converge vers la matrice stable $P=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ avec $a+b=1$ telle que :

$P=P\times M\iff\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\0,15 & 0,85\end{pmatrix}$ avec $a+b=1$ soit

$\left\{\begin{array}{lcl}a & = & 0,9a+0,15b\\b & = & 0,1a+0,85b\\a+b & = & 1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}0,1a-0,15b & = & 0\\-0,1a+0,15b & = & 0\\a+b & = & 1\end{array}\right.\iff$

$\left\{\begin{array}{lcl}a-1,5b & = & 0\\a+b & = & 1\end{array}\right.\Rightarrow 2,5b=1\iff b=\dfrac{1}{2,5}=\dfrac{4}{10}=0,4$, d'où $a=0,6$.

L'état stable est $P=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}$. À terme le groupe politique aura 60 % d'opinions favorables.

Deuxième partie

1. La matrice $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ avec $a_n+b_n=1$ traduit l'état probabiliste au bout de n mois et l'on sait que :

$P_{n+1}=P_n\times M\iff\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\0,15 & 0,85\end{pmatrix}$ donc on a le système :

$\left\{\begin{array}{lcl}a_{n+1} & = & 0,9a_n+0,15b_n\\b_{n+1} & = & 0,1a_n+0,85b_n\\a_n+b_n & = & 1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}a_{n+1} & = & 0,9a_n+0,15(1-a_n)\\b_{n+1} & = & 0,1a_n+0,85b_n\\b_n & = & 1-a_n\end{array}\right.\iff$

$\left\{\begin{array}{lcl}a_{n+1} & = & 0,75a_n+0,15\\b_{n+1} & = & 0,1a_n+0,85b_n\\b_n & = & 1-a_n\end{array}\right.$.

Conclusion : pour tout entier n, $a_{n+1}=0,75a_n+0,15$.

2. **a.** Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=a_{n+1}-0,6=0,75a_n+0,15-0,6=0,75a_n-0,45=0,75\left(a_n-\frac{0,45}{0,75}\right)=0,75\,(a_n-0,6)=0,75u_n$.

L'égalité $u_{n+1}=0,75u_n$, vraie pour tout naturel n montre que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,75$ et de premier terme $u_0=a_0-0,6=0,5-0,6=-0,1$.

b. On sait que pour tout naturel n, $u_n = u_0 \times 0,75^n = -0,1 \times 0,75^n$.
Or $u_n = a_n - 0,6 \iff a_n = u_n + 0,6 = -0,1 \times 0,75^n + 0,6 = 0,6 - 0,1 \times 0,75^n$.

c. Comme $0 < 0,75 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,75^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6$.
Ce résultat est cohérent avec le résultat trouvé plus haut.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Première partie

1. On a G$(4,5\,;\,9,79)$. Voir la figure ci-dessous.
2. Voir la figure ci-dessous.
3. 2013 correspond au rang $x = 10$, d'où suivant ce modèle :
$-1,5 \times 10 + 16,5 = 1,5$ tonne de minerai.

Deuxième partie

1. On lit à peu près 3,7 tonnes de minerai.
2. $\left\{\begin{array}{lcl} \text{A} & \in & C \\ \text{B} & \in & C \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 18 & = & k\text{e}^{p\times 0} \\ 11,2 & = & k\text{e}^{p\times 3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 18 & = & k \\ 11,2 & = & 18\text{e}^{3p} \end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} 18 & = & k \\ \dfrac{11,2}{18} & = & \text{e}^{3p} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 18 & = & k \\ \ln\left(\frac{11,2}{18}\right) & = & 3p \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 18 & = & k \\ \dfrac{1}{3}\ln\left(\frac{11,2}{18}\right) & = & p \end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} 18 & = & k \\ -0,158 & \approx & p \end{array}\right.$
On a donc comme équation de la courbe :
$$y = 18\text{e}^{-0,16x}.$$

Troisième partie

1.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z_i	2,90	2,75	2,59	2,40	2,23	2,05	1,96	1,81	1,65	1,46

2. La calculatrice donne en arrondissant les coefficients au centième :
$z = -0,16x + 2,89$.
3. Pour $y > 0$, on a $z = \ln y = -0,16x + 2,89 \iff y = \text{e}^{-0,16x+2,89}$ = - 0,16x × $\text{e}^{2,89}$
Or $\text{e}^{2,89} \approx 17,993 \approx 18,0$ arrondi au dixième près.
Donc $y = 18\text{e}^{-0,16x}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Première partie

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$.
2. Le dénominateur étant supérieur à 1 donc non nul f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x) = \dfrac{5\text{e}^x\left(\text{e}^x+1\right) - 5\text{e}^x \times \text{e}^x}{\left(\text{e}^x+1\right)^2} = \dfrac{5\text{e}^{2x} + 5\text{e}^x - 5\text{e}^{2x}}{\left(\text{e}^x+1\right)^2} = \dfrac{5\text{e}^x}{\left(\text{e}^x+1\right)^2}$.
3. Quotient de deux termes positifs quel que soit le réel x, $f'(x) > 0$, donc la fonction f est strictement croissante de $\dfrac{5}{2}$ à 5.

4. Une équation de D est de la forme : $y - f(0) = f'(0)(x-0)$.
On a $f(0) = \dfrac{5}{2}$ (énoncé) et $f'(0) = \dfrac{5}{(1+1)^2} = \dfrac{5}{4}$, d'où :
$y - \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{4}x \iff y = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{5}{2}$.

Deuxième partie

1. Posons $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$, alors $u'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $f(x) = 5\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ qui est la dérivée de $5\ln[u(x)] = 5\ln\left[\mathrm{e}^x+1\right]$.
Donc on a $F(x) = 5\ln\left[\mathrm{e}^x+1\right] + K$, avec $K \in \mathbb{R}$ et comme
$F(0) = 0 \iff 5\ln\left[\mathrm{e}^0+1\right] + K = 0 \iff 5\ln 2 + K = 0 \iff K = -5\ln 2$, on a finalement :
$F(x) = 5\ln\left[\mathrm{e}^x+1\right] - 5\ln 2$ ou encore $F(x) = 2\left(\left[\mathrm{e}^x+1\right] - \ln 2\right) = 5\left(\ln\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{2}\right)$.

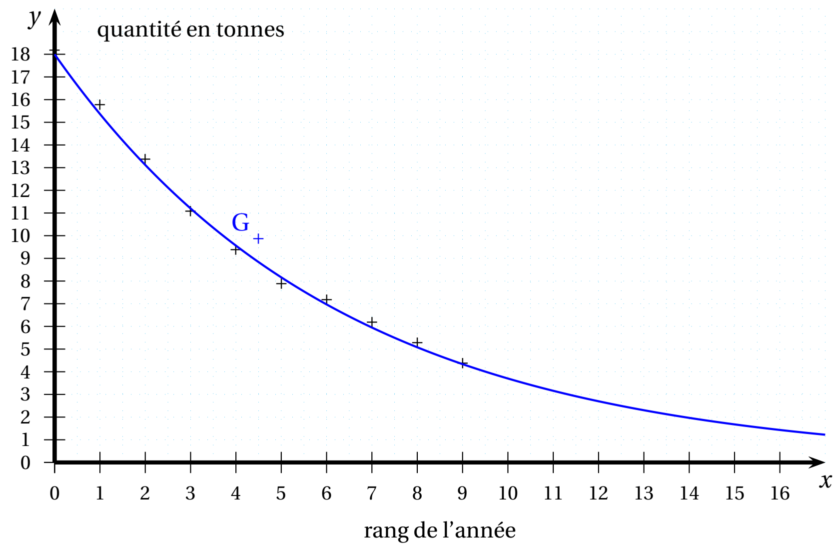
2. On a $F(1) = 5\left(\ln\dfrac{\mathrm{e}^1+1}{2}\right) = 5\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$.

3. On a vu que la fonction f ne prend que des valeurs positives donc l'aire de la surface est égale, en unités d'aire à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = 5\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right) - 0 = 5\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right) \approx 3,100$ soit 3,1 unités d'aire. (ce que l'on vérifie approximativement sur la figure)

ANNEXE 1

(À remettre avec la copie)

Exercice 3



ANNEXE 2

Exercice 4