Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES Centres étrangers 17 juin 2008

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

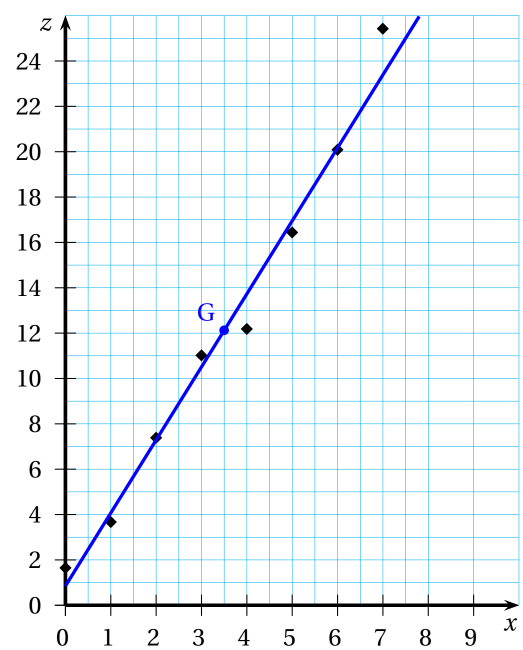
1. De 1997 à 2000, augmentation de $\dfrac{240-50}{50}\times 100 = 380\,\%$.

De 2000 à 2003, $\dfrac{300-240}{240}\times 100 = 25\,\%$.

2. a.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de « journées participant » : y_i	50	130	200	240	250	280	300	320
$z_i = \mathrm{e}^{\frac{y_i}{100}}$	1,65	3,67	7,39	11,02	12,18	16,44	20,09	25,43

b. $z_i = \mathrm{e}^{\frac{y_i}{100}}$



c. Le point moyen G a pour coordonnées (3,5 ; 12,12).

d. La calculatrice donne $z = 3,22x + 0,85$ comme équation de (D).

e. $z = \mathrm{e}^{\frac{y}{100}} = 3,22x + 0,85 \iff \frac{y}{100} = \ln(3,22x + 0,85) \iff$
$y = 100\ln(3,22x + 0,85)$.

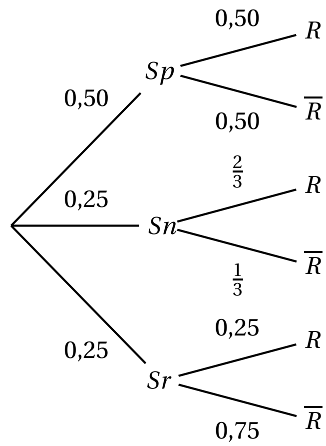
3. a. 2007 correspond au rang $x = 10$. D'après ce modèle exponentiel le nombre de « journées participant » sera de :
$100\ln(3,22\times 10 + 0,85) = 100\ln 40,05 \approx 349,8 \approx 350$.

b. Pourcentage d'erreur : $\dfrac{390-350}{390}\times 100 = \dfrac{40}{390}\times 100 = \dfrac{4}{39}\times 100 \approx 10,26\,\%$.
Conclusion : le modèle n'est pas pertinent.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. On a $p\left(Sp \cap \overline{R}\right) = p(Sp) \times p_{Sp}\left(\overline{R}\right) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$.

3. On a de même : $p\left(Sn \cap \overline{R}\right) = p(Sn) \times p_{Sn}\left(\overline{R}\right) = 0,25 \times \frac{1}{3} = \frac{0,25}{3}$.

$p\left(Sr \cap \overline{R}\right) = p(Sr) \times p_{Sr}\left(\overline{R}\right) = 0,25 \times 0,75 = 0,1875$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p\left(\overline{R}\right) = p\left(Sp \cap \overline{R}\right) + p\left(Sn \cap \overline{R}\right) + p\left(Sr \cap \overline{R}\right) = 0,25 + \frac{0,25}{3} + 0,1875 = \frac{0,75+0,25+0,5625}{3} = \frac{1,5625}{3} = \frac{15625}{30000} = \frac{25}{48}$.

4. On a $p(R) = 1 - p\left(\overline{R}\right) = 1 - \dfrac{25}{48} = \dfrac{23}{48}$.

Donc $p_R(Sn) = \dfrac{p(Sn \cap R)}{p(R)} = \dfrac{0,25 \times \frac{2}{3}}{\frac{23}{48}} = \dfrac{0,5 \times 48}{3 \times 23} = \dfrac{8}{23}$.

5. Le gain pour un matériel loué est de 30 € s'il ne doit pas être réparé, probabilité de $\dfrac{25}{48}$ ou de 10 € s'il doit être réparé, probabilité de $\dfrac{23}{48}$

L'espérance de gain est donc :

$\text{E} = 30 \times \dfrac{25}{48} + 10 \times \dfrac{23}{48} = \dfrac{750 + 230}{48} = \dfrac{980}{48} \approx 20,416$ soit environ 20,42 (€) par matériel loué.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = a_{n+1} - 120 = 0,85a_n + 18 - 120 = 0,85a_n - 102 = 0,85\left(a_n - \frac{102}{0,85}\right) = 0,85\left(a_n - 120\right) = 0,85u_n$.

L'égalité $u_{n+1} = 0,85u_n$ vraie pour tout $n \geqslant 0$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $u_0 = a_0 - 120 = 50 - 120 = -70$.

b. On sait que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = -70 \times 0,85^n$.

Or $u_n = a_n - 120 \iff a_n = u_n + 120 = 120 - 70 \times 0,85^n$.

c. Comme $0 < 0,85 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 120$.

Ceci signifie qu'à terme le nombre d'adhérents va plafonner à 119 (puisque 120 n'est jamais atteint).

2. **a.** Au départ il faut $e_0 = 1\times 0,6\times 50+2\times 0,4\times 50 = 50\times 1,4 = 70$ heures de gymnastique.

Si la répartition se maintient avec les nouveaux adhérents il faudra prévoir un nombre d'heures e_n tel que :

$e_n = 1\times 0,6\times a_n+2\times 0,4\times a_n = 1,4a_n$, soit $e_n = 1,4\left(120-70\times 0,85^n\right) = 168-98\times 0,85^n$.

b. On vient de voir que le nombre d'heures de gymnastique était pour l'année $2000+n$, $e_n = 168-98\times 0,85^n$.

Donc à raison de 20 participants par heure il faut trouver un nombre entier n de séances tel que :

$\dfrac{168-98\times 0,85^n}{20} > 8 \iff 168-98\times 0,85^n > 160 \iff 98\times 0,85^n < 8 \iff 0,85^n < \frac{8}{98} \iff$
$n\ln 0,85 < \ln\left(\frac{8}{98}\right) \iff n > \dfrac{\ln\left(\frac{8}{98}\right)}{\ln 0,85} \approx 15,4.$

Le plus entier est $n = 16$, soit en 2016.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Il faut résoudre l'inéquation $0,9^n < 0,3 \iff n\ln 0,9 < \ln 0,3 \iff n > \frac{\ln 0,3}{\ln 0,9} \approx 11,4$: le plus petit entier est donc $n = 12$.
2. La probabilité que l'événement ne se produise jamais est $0,6^8$; donc la probabilité que l'évènement A se réalise au moins une fois est égale à $1-0,6^8$.
3. On a $F(x) = \frac{x^3}{3}+x+C$, avec $C\in\mathbb{R}$.
   Or $F(1) = 0 \iff \frac{1}{3}+1+C = 0 \iff C = -\frac{4}{3}$.
   Donc $F(x) = \frac{x^3}{3}+x-\frac{4}{3}$ et $F(0) = -\frac{4}{3}$.
4. $f(0) < 0$ puisque $0 < 2$.
5. $x = 3$.
6. Par composition de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\ln[f(x)] = +\infty$.
7. Puisque $F'(x) = f(x)$, le signe de la dérivée de $F(x)$ est celui de $f(x)$. Sur $]-3\,;\,2[$, on a $f(x) < 0$, donc F est décroissante sur cet intervalle.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** On a $\displaystyle\lim_{x\to-1} -3x+4 = 7$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1}\ln(x+1) = -\infty$, donc par somme de limites $\ln(x+1)f(x) = -\infty$.

On en déduit que la droite dont une équation est $x = -1$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C})$.

b. On a pour $x\neq 0$, $f(x) = x\left(-3+\frac{4}{x}+8\frac{\ln(x1)}{x}\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x1)}{x} = 0$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -3+\frac{4}{x}+8\frac{\ln(x1)}{x} = -3$, puis par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** On a $f'(x) = -3+8\dfrac{1}{x+1} = -3+\dfrac{8}{x+1} = \dfrac{-3x-3+8}{x+1}\,\dfrac{5-3x}{x+1}$.

b. Sur $]-1\,;\,+\infty[$, $x+1 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $5-3x$.

$5-3x = 0 \iff x = \dfrac{5}{3}$. Donc :

- sur $\left]-1\,;\,\frac{5}{3}\right[$, $f(x) > 0$: la fonction est croissante ;
- sur $\left]\frac{5}{3}\,;\,+\infty\right[$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante.

On a donc un maximum $f\left(\frac{5}{3}\right) = -3\times\frac{5}{3}+4+8\ln\left(\frac{5}{3}+1\right) = -5+4+8\ln\frac{8}{3} = 8\ln\frac{8}{3}-1 \approx 6,85 \approx 6,9$.

3. On a vu que sur l'intervalle $\left[\dfrac{5}{3}\ ;\ +\infty\right[$, la fonction est continue, car dérivable et strictement décroissante de $f\left(\frac{5}{3}\right) > 0$ à moins l'infini : d'après le théorème de la valeur intermédiaire il existe donc un seul réel $x_0 \in \left[\dfrac{5}{3}\ ;\ +\infty\right[$ tel que $f(x_0) = 0$.

La calculatrice donne :

$f(6) \approx 1,5$ et $f(7) \approx -0,4$, donc $6 < x_0 < 7$;

$f(6,8) \approx 0,03$ et $f(6,9) \approx -0,2$ donc $6,8 < x_0 < 6,9$:

$f(6,81) \approx 0,001$ et $f(6,82) \approx -0,05$, donc $6,81 < x_0 < 6,82$.

4. **a.** On a $f'(x) = -\dfrac{3}{2} \times 2x - 4 + 8 \times 1 \times \ln(x+1) + 8(x+1) \times \dfrac{1}{x+1} =$
$-3x - 4 + 8\ln(x+1) + 8 = -3x + 4 + 8\ln(x+1) = f(x)$.

Donc F est bien une primitive de f sur $]-1\ ;\ +\infty[$..

b. Sur l'intervalle $[0\,;\,5]$, la fonction f est décroissante de $f(0) = 4$ à $f(5) \approx 3,33$; elle est donc positive sur cet intervalle et l'aire demandée est donc égale à l'intégrale

$\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^5 = F(5) - F(0) =$

$-\dfrac{3}{2} \times 5^2 - 4 \times 5 + 8 \times (5+1)\ln(5+1) - \left[-\dfrac{3}{2} \times 0 - 4 \times 0 + 8(0+1)\ln(0+1)\right] = -\dfrac{75}{2} - 20 + 48\ln 6 + 0 =$

$48\ln 6 - \dfrac{115}{2} \approx 28,5$ unités d'aire.