**Durée : 3 heures**

# Corrigé du baccalauréat ES Antilles–Guyane 14 septembre 2012

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

On peut écrire $f(x) = 2 - \mathrm{e}^{2x-\ln(3)} = 2 - \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-\ln(3)} = 2 - \mathrm{e}^{2x} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(3)}} = 2 - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}$.

1. La fonction $f$ :

   On a donc $f'(x) = -\dfrac{1}{3} \times 2 \times \mathrm{e}^{2x} < 0$ car opposé du produit de trois nombres positifs : la fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Réponse **b.**

2. Le réel $f(1)$ est égal à :

   $f(1) = 2 - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^2 = \dfrac{6-\mathrm{e}^2}{3}$. Réponse **b.**

3. La limite de $f$ en $+\infty$ est égale à :

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Réponse **b.**

4. La tangente à la courbe $C$ au point d'abscisse $\ln(3)$ a pour équation :

   On a vu que $f'(x) = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{2x}$, donc $f'(\ln(3)) = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{2\ln(3)} = -\dfrac{2}{3}\left(\mathrm{e}^{\ln(3)}\right)^2 = -\dfrac{2}{3} \times 3^2 = -6$.

   D'autre part $f(\ln(3)) = 2 - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{2\ln(3)} = 2 - \dfrac{1}{3} \times 9 = 2 - 3 = -1$.

   Une équation de la tangente est donc :

   $y - f(\ln(3)) = f'(\ln(3))(x - \ln(3))$, soit $y - (-1) = -6(x - \ln(3)) \iff$
   $y = -6x + 6\ln(3) - 1$. Réponse **c.**

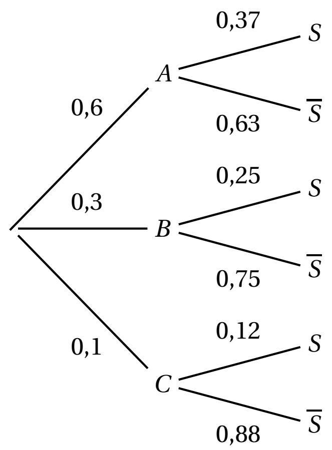
**EXERCICE 2** **5 points**

**Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. **a.** On a $p(A) = 0,6$ et $p(B) = 0,3$.

   **b.** L'énoncé donne $p_A(S) = 0,37$ ; $p_B(S) = 0,25$ et $p_C(S) = 0,12$.

   **c.**




2. On a $p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0,6 \times 0,37 = 0,222$.

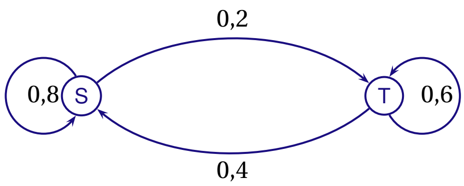
**3.** De même on trouve que :
$p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0,3 \times 0,25 = 0,075$.
$p(C \cap S) = p(C) \times p_C(S) = 0,1 \times 0,12 = 0,012$.
D'où d'après la loi des probabilités totales :
$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) = 0,222 + 0,075 + 0,012 = 0,309$.

**4.** Il faut trouver $p_S(B) = \dfrac{p(S \cap B)}{p(S)} = \dfrac{0,075}{0,309} = \dfrac{75}{309} = \dfrac{25}{103} \approx 0,243$.

**5.** La probabilité qu'un appareil tombe en panne avant 5 ans est égale à 0,309 avec un coût de 110, donc le coût moyen par lave-vaisselle de ces réparations sera de $0,309 \times 110 = 33,99$ €.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**1.**




**2.** La matrice de transition $M$ de ce graphe vérifie $P_{n+1} = M \times P_n$ est telle que $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

**3.** On a $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

La probabilité que l'employé tiré au sort mange au « self » le deuxième jour est égale à 0,6.

**4.** Les termes de $M$ étant non nuls, l'état $P_n$ converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$ vérifiant $P = PM$, soit :

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $x + y = 1$ d'où le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0,8x + 0,4y \\ y & = & 0,2x + 0,6y \\ x + y & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0,2x - 0,4y & = & 0 \\ -0,2x + 0,4y & = & 0 \\ x + y & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 0 \\ x + y & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$3y = 1 \iff y = \dfrac{1}{3}$, d'où $x = \dfrac{2}{3}$.

L'état stable est $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

**5.** Quel que soit le naturel $n$ non nul, on a :

$P_{n+1} = P_n \times M$, soit $\begin{pmatrix} s_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $s_n + t_n = 1$. D'où le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s_{n+1} & = & 0,8s_n + 0,4t_n \\ t_{n+1} & = & 0,2s_n + 0,6t_n \\ s_n + t_n & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} s_{n+1} & = & 0,8s_n + 0,4(1 - s_n) \\ t_{n+1} & = & 0,2s_n + 0,6t_n \\ t_n & = & 1 - s_n \end{array} \right. \Rightarrow$$

$s_{n+1} = 0,8s_n - 0,4s_n + 0,4$ soit finalement
$s_{n+1} = 0,4s_n + 0,4 = \dfrac{2}{5}s_n + \dfrac{2}{5}$.

**6. a.** On calcule $u_{n+1} = s_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{5}s_n + \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{5}s_n + \dfrac{6 - 10}{15} = \dfrac{2}{5}s_n - \dfrac{4}{15} = \dfrac{2}{5}\left(s_n - \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{5}u_n$.

Cette dernière égalité montre que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $u_1 = s_1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3-4}{6} = -\dfrac{1}{6}$.

**b.** On sait que $u_n = -\dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$ (on démarre au rang 1)

**c.** Comme $u_n = s_n - \dfrac{2}{3} \iff s_n = u_n + \dfrac{2}{3}$, on a donc

$s_n = -\dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}$.

**d.** Comme $0 < \dfrac{2}{5} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$.

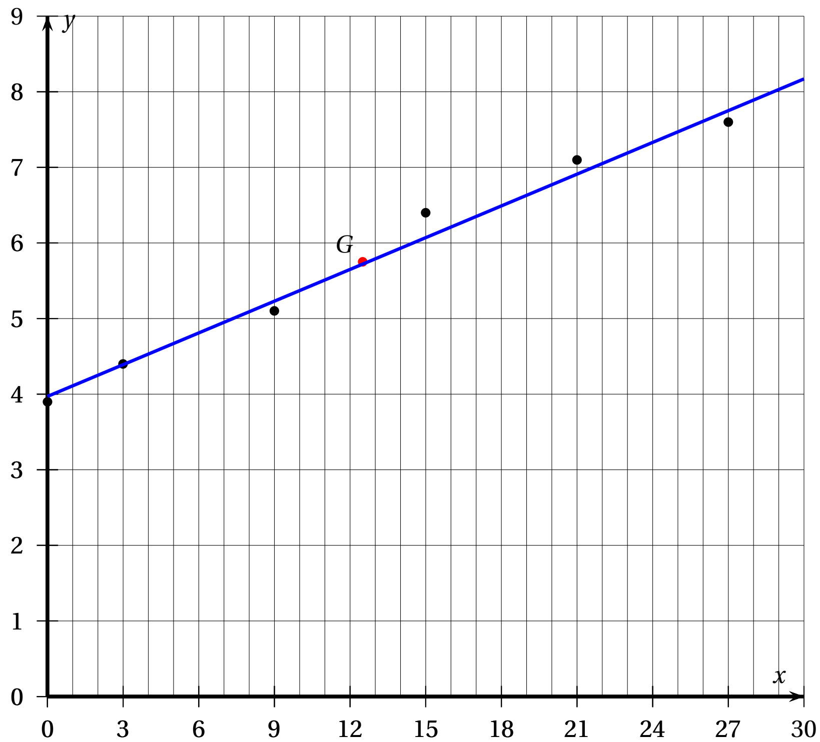
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{2}{3}$.

Ceci est conforme au résultat de la question 4 : à terme les deux tiers des employés mangeront au « self ».

**EXERCICE 3** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

**1.**




**2.** Si $G\left(\overline{x}\,;\,\overline{y}\right)$, on a

$\overline{x} = \dfrac{0+3+9+15+21+27}{6} = 12,5$ et $\overline{y} = \dfrac{3,9+4,4+5,1+6,4+7,1+7,6}{6} = 5,75$. Donc $G(12,5\,;\,5,75)$.

**3.** La calculatrice donne $y = 0,14x + 3,97$ en arrondissant les coefficients au centième.

Voir le tracé ci-dessus.

**4.** Décembre 2007 correspond au rang 33 (mois après mars 2005), donc

$$0,14 \times 33 + 3,97 = 8,59.$$

Il y aura en décembre 2007 environ 8,6 milliers de vélos.

**5.** L'erreur en pourcentage est :

$$\frac{8,6-7,6}{7,6}\times 100=\frac{1}{7,6}\times 100\approx 13,2.$$

La prévision a donc été surestimée de 13„2 % environ.

**EXERCICE 4** **7 points**

**Commun à tous les candidats**

### Partie A

$$f(x)=4\ln(3x+1)-x+3$$

**1.** On a $x>0,5\Rightarrow 3x>1,5\Rightarrow 3x+1>2,5\Rightarrow \ln(3x+1)$ existe.
La fonction $f$ est donc définie et dérivable et sur [0,5 ; 18]
$f'(x)=4\times\frac{3}{3x+1})-1=\frac{12}{3x+1}-1=\frac{12-3x-1}{3x+1}=\frac{-3x+11}{3x+1}$.

**2.** On a déjà vu que $3x+1>0$ sur l'intervalle : le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $-3x+11$.
Or $-3x+11>0 \iff 11>3x \iff \frac{11}{3}>x$ et de même $-3x+11<0 \iff 11<3x \iff \frac{11}{3}<x$.
Donc $f'(x)>0$ sur $\left[0,5\ ;\ \frac{11}{3}\right]$ et $f$ est croissante sur cet intervalle ;
$f'(x)<0$ sur $\left[\frac{11}{3}\ ;\ 18\right]$ et $f$ est décroissante sur cet intervalle.
D'autre part $f(0,5)=4\ln(2,5)-0,5+3=4\ln(2,5)+2,5\approx 6,17$ ;
$f\left(\frac{11}{3}\right)=4\ln 12-\frac{11}{3}+3=4\ln 12-\frac{2}{3}\approx 9,27$
$f(18)=4\ln 55-18+3=4\ln 55-15\approx 1,03$.
D'où le tableau de variations :

| $x$ | $0,5$ | | $\frac{11}{3}$ | | $18$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\approx 6,17$ | $\nearrow$ | $\approx 9,27$ | $\searrow$ | $\approx 1,03$ |

**3.** Le tableau de variations montre que $f$ dérivable donc continue sur l'intervalle $\left[\frac{11}{3}\ ;\ 18\right]$ est décroissante de 9,27 à 1,03. Il existe donc un réel unique $\alpha$ de cet intervalle tel que $f(\alpha)=6$.
La calculatrice donne :
$f(11)\approx 6,1$ et $f(12)\approx 5,4$, donc $11<\alpha<12$ ;
$f(11,1)\approx 6,04$ et $f(11,2)\approx 5,98$, donc $11,1<\alpha<11,2$ ;
$f(11,16)\approx 6,002$ et $f(11,17)\approx 5,995$, donc $11,16<\alpha<11,17$.

**4.**

$$F(x)=\frac{4}{3}(3x+1)\ln(3x+1)-\frac{x^2}{2}-x.$$

**a.** Calculons sur [0,5 ; 18] $F'(x)=\frac{4}{3}\times 3\ln(3x+1)+\frac{4}{3}\times(3x+1)\times\frac{3}{(3x+1)}-\frac{2x}{2}-1=4\ln(3x+1)+4-x-1=4\ln(3x+1)-x+3=f(x)$.
Donc $F$ est bien une primitive de $f$ sur [0,5 ; 18].

**b.** D'après le résultat précédent : $\displaystyle\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x = F(8) - F(1) = \frac{4}{3}(3\times 8+1)\ln(3\times 8+1) - \frac{8^2}{2} - 8 - \left(\frac{4}{3}(3\times 1+1)\ln(3\times 1+1) - \frac{1^2}{2} - 1\right) = \frac{100}{3}\ln 25 - 32 - 8 - \left(\frac{16}{3}\ln 4 - \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{100}{3}\ln 25 - \frac{16}{3}\ln 4 - 40 + \frac{3}{2} = \frac{100}{3}\ln 25 - \frac{16}{3}\ln 4 - \frac{77}{2} \approx 61,4$.

**Partie B**

1. On a vu que le maximum de $f$ sur [0,5 ; 18] est atteint pour $x = \frac{11}{3} \approx 3,67$ soit environ 367 pièces.
2. Il faut trouver pour quelles valeurs de $x$, $f(x) \geqslant 6$ ; or on a vu $f(\alpha) = 6$.
   D'après le tableau de variations l'entreprise réalise un bénéfice supérieur ou égal à 6 000 euros sur l'intervalle $[0,5\ ;\ \alpha] \approx [0,5\ ;\ 11,16]$.
3. La valeur moyenne de $f$ sur [1 ; 8] est égal à :

$$\frac{1}{8-1}\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{7}\times 61,4 \approx 8,77.$$

   La valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 100 et 800 pièces est 8 770 € soit 8 800 € à la centaine d'euros près.