Durée : 3 heures

Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2011

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni ne retire de point.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\mathrm{e}[$ par $f(x) = \ln(\mathrm{e} - x)$.
On suppose f dérivable sur $]-\infty\,;\,\mathrm{e}[$ et on note f' sa fonction dérivée.
$f'(0)$ est égal à :

-1	$-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	1

2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{x}$.
On considère une fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout $x > 0$, on ait $0 < g(x) < f(x)$.
La limite de la fonction g en $+\infty$ est :

$-\infty$	0	$+\infty$	on ne peut pas savoir

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 3x + 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$.
Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $(\mathscr{C}_f)$:

admet comme asymptote la droite d'équation $x = 0$	admet comme asymptote la droite d'équation $y = 3x + 1$	admet comme asymptote la droite d'équation $y = 0$	n'admet pas de droite asymptote

4. On note exp la fonction exponentielle.
Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $u(0) = 1$, $u(1) = 0$ et $u(\mathrm{e}) = 2$. Soit f la fonction définie par $f(x) = u[\exp(x)]$.
$f(0)$ est égal à :

0	1	2	e

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

À l'occasion d'un festival culturel, une agence de voyages propose trois types de transport pour permettre à chaque client de se rendre dans la ville organisatrice afin d'assister à la cérémonie d'ouverture.
Les trois moyens de transport proposés sont l'avion, le train ou le car.
À chacun des clients qui achètent un billet de transport, l'agence propose de souscrire une assurance multirisque qui permet, sous certaines conditions, une indemnisation en cas de retard ou de vol de bagages.

Une enquête montre que 55 % des clients choisissent l'avion, que 40 % choisissent le train et que les autres choisissent le car.
De plus, parmi les clients ayant choisi l'avion, 20 % ont souscrit l'assurance multirisque ; ils sont 8 % à choisir cette assurance parmi ceux qui ont choisi le voyage en train et seulement 4 % parmi ceux qui ont choisi le car.

On prend au hasard le dossier d'un client qui se rendra à la cérémonie d'ouverture du festival, chaque dossier ayant la même probabilité d'être choisi.
On note :

- A l'évènement : « Le client a acheté un billet d'avion » ;
- T l'évènement : « Le client a acheté un billet de train » ;
- C l'évènement : « Le client a acheté un billet de car » ;
- S l'évènement : « Le client a souscrit une assurance multirisque » et $\overline{S}$ son évènement contraire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que le dossier choisi soit celui d'un client qui voyagera en train et qui a souscrit une assurance multirisque. On donnera la valeur exacte de cette probabilité.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à $0,144$.
4. On prend un dossier au hasard parmi les clients n'ayant pas souscrit une assurance multirisque.

   Calculer la probabilité que ce dossier soit celui d'un client voyageant en train. Le résultat sera donné arrondi au millième.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On choisit trois dossiers au hasard, indépendamment les uns des autres.

   Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins deux des dossiers concernent un client ayant souscrit l'assurance multirisque.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité. Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après midi à partir du 1er septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.
Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5 % des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.
Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.
La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation. On note u_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $u_0 = 80$.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de n semaines.

1. Montrer que $u_1 = 86$.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = u_n - 200$. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   Pour tout entier naturel n, exprimer a_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 200 - 120 \times 0,95^n$.

   Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = 6 \times 0,95^n$. En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne la fréquentation des lignes aériennes, en millions de passagers, entre la France métropolitaine et les pays étrangers depuis 1980 (source INSEE).

Année	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2008
Rang de l'année : x_i	0	5	10	15	20	25	28
Nombre de passagers y_i (en millions)	21,9	26,4	36,9	44,7	67	82	97,9

On cherche à étudier l'évolution du nombre de passagers y entre la France métropolitaine et les pays étrangers en fonction du rang x de l'année.

1. Déterminer le pourcentage d'évolution du nombre de passagers entre 2005 et 2008 (le résultat sera arrondi à 0,1 %).
2. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ associé à cette série dans le plan muni d'un repère orthogonal défini de la manière suivante :

   0,5 cm pour 1 année sur l'axe des abscisses ;

   1 cm pour 10 millions de passagers sur l'axe des ordonnées.
3. Expliquer pourquoi un ajustement affine ne semble pas adapté.

   L'allure du nuage suggère un ajustement exponentiel. Pour cela, on pose $z = \ln y$.
4. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millième.

Rang de l'année : x_i	0	5	10	15	20	25	28
z_i	3,086						

5. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au millième).

6. Montrer que l'on a la relation $y = A\mathrm{e}^{Bx}$ avec $A \approx 20,989$ et $B \approx 0,055$.
7. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Les compagnies aériennes prévoient que le pourcentage d'augmentation entre 2008 et 2011 sera de 30 %. Cela est-il cohérent avec l'ajustement exponentiel déterminé dans la question 6 ?

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique et vend à des particuliers des panneaux solaires photovoltaïques produisant de l'électricité. Elle en produit chaque mois entre 50 et 2 500.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,5 ; 25]$ par

$$f(x) = 18\ln x - x^2 + 16x - 15.$$

Si x représente le nombre de centaines de panneaux solaires fabriqués et vendus, alors on admet que $f(x)$ représente le bénéfice mensuel de l'entreprise, en milliers d'euros.
On suppose que f est dérivable sur $[0,5 ; 25]$, et on note f' sa fonction dérivée.

PARTIE A

1. Calculer $f'(x)$. Vérifier que, pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[0,5 ; 25]$, on a $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 16x + 18}{x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,5 ; 25]$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 25]$.
3. **a.** Calculer $f(1)$.

   b. Montrer que sur l'intervalle $[18 ; 19]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. Déterminer une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près.

   c. En déduire le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,5 ; 25]$.
4. Quels sont le nombre minimal et le nombre maximal de panneaux que l'entreprise doit produire et vendre pour être bénéficiaire ?
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice mensuel de 100 000 € ? Justifier la réponse.

PARTIE B

1. On admet que la fonction G définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $G(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 25]$.
2. *Rappel : soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$, où $a < b$.*
   La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a ; b]$ est le nombre réel m défini par $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Déterminer la valeur moyenne du bénéfice mensuel de l'entreprise, arrondie à la centaine d'euros, lorsque celle-ci produit et vend entre 100 et 1 800 panneaux solaires.