Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2011

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $f'(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}-x}$, donc $f'(0) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}-0} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

2. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
O na donc aussi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

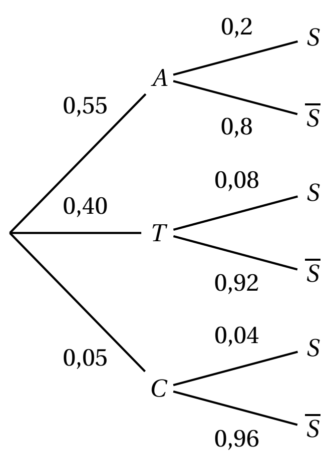
3. On a $\displaystyle\lim_{x\to0} 3x = 0$ et $_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$: la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\left(\mathscr{C}_f\right)$

4. $f(0) = u[\exp(0)] = u(1) = 0$.

Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. Il faut calculer :
$p(\mathrm{T}\cap S) = p(T) \times p_T(S) = 0,40 \times 0,08 = 0,032$.
3. On a de la même façon :
$p(A\cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0,55 \times 0,2 = 0,11$;
$p(C\cap S) = p(C) \times p_C(S) = 0,05 \times 0,04 = 0,0020$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(S) = p(A\cap S) + p(T\cap S) + p(C\cap S) = 0,11 + 0,032 + 0,002 = 0,144$.

4. Il faut trouver $p_{\overline{S}}(T) = \dfrac{p\left(\overline{S} \cap T\right)}{p\left(\overline{S}\right)}$.

Or $p\left(\overline{S}\right) = 1 - p(S) = 1 - 0,144 = 0,856$ et

$p\left(\overline{S} \cap p(T)\right) = 0,40 \times 0,92 = 0,368$.

Donc $p_{\overline{S}}(T) = \dfrac{0,368}{0,856} \approx 0,430$ au millième près.

5. On a une épreuve de Bernoulli avec un probabilité $p = 0,144$ et $n = 3$.

Les situations favorables sont : SSS, $SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$ et $\overline{S}SS$. la probabilité est donc égale à :

$0,144^3 + 3 \times 0,144^2 \times (1 - 0,144) \approx 0,056$ au millième près.

Exercice 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Sur les 80 enfants inscrits 5 % soit $0,05 \times 80 = 0,5 \times 8 = 4$ ne se réinscrivent pas la semaine suivante, mais 10 nouveaux s'inscrivent, donc :

$u_1 = 80 - 4 + 10 = 86$.

2. De la semaine n à la semaine $n+1$, il reste $0,95u_n$ auxquels s'ajoutent les 10 nouveaux, donc :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 10.$$

3. $a_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,95u_n + 10 - 200 = 0,95u_n - 190 = 0,95\,(u_n - 200) = 0,95a_n$.

Pour tout entier naturel n, $\;a_{n+1} = 0,95a_n$ signifie que la suite (a_n) est géométrique de raison 0,95. De plus $a_0 = u_0 - 200 = 80 - 200 = -120$.

On sait qu'alors pour tout entier n, , $a_n = -120 \times 0,95^n$.

Or $a_n = u_n - 200 \iff u_n = a_n + 200 = 200 - 120 \times 0,95^n$.

4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 200 - 120 \times 0,95^{n+1} - (200 - 120 \times 0,95^n) = 120 \times 0,95^n - 120 \times 0,95^{n+1} =$

$120 \times 0,95^n(1 - 0,95) = 120 \times 0,05 \times 0,95^n = 6 \times 0,95^n$.

5. Il faut résoudre l'inéquation : $200 - 120 \times 0,95^n > 150 \iff 50 > 120 \times 0,95^n \iff \dfrac{5}{12} > 0,95^n \iff$

$\ln\dfrac{5}{12} > n\ln 0,95 \iff n > \dfrac{\ln\frac{5}{12}}{\ln 0,95}$.

Or $\dfrac{\ln\frac{5}{12}}{\ln 0,95} \approx 17,07$.

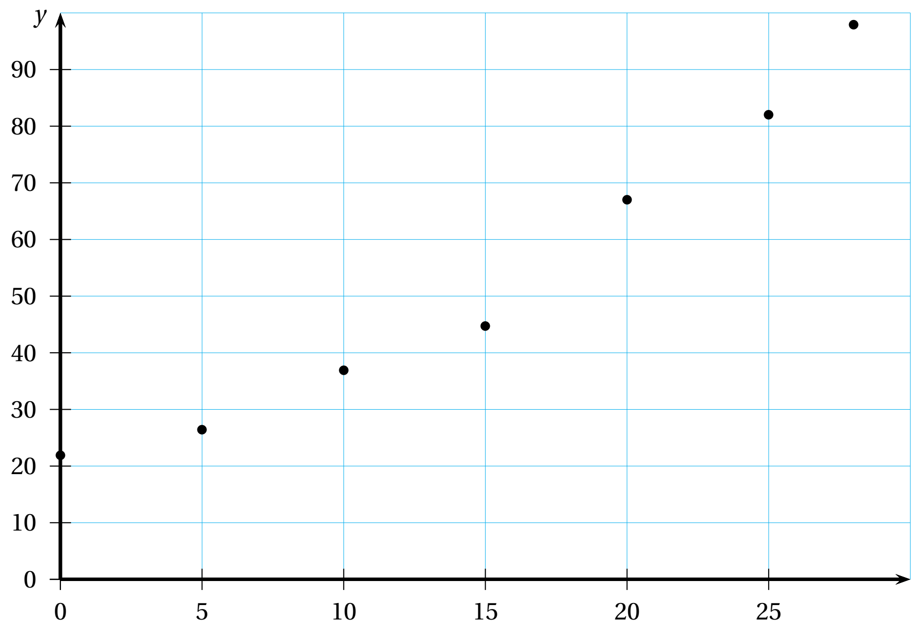
Il faudra attendre la 18^e^ semaine.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. De 2005 à 2008 le pourcentage d'évolution du nombre de passagers est égal à $\dfrac{97,9 - 82}{82} \times 100 \approx 19,4\,\%$.

2.



3. Les points ne semblent pas être alignés.

4.

Rang de l'année : x_i	0	5	10	15	20	25	28
z_i	3,086	3,273	3,608	3,800	4,205	4,407	4,584

5. La calculatrice donne $z = 0,055x + 3,044$ (coefficients arrondis au millième).
6. Quel que soit $y > 0$, $z = \ln y \iff y = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{0,055x+3,044} = \mathrm{e}^{3,044} \times \mathrm{e}^{0,055x}$.
   Or $\mathrm{e}^{3,044} \approx 20,989$, donc finalement : $y = 20,989\mathrm{e}^{0,055x}$.
7. 2011 correspond à $x = 31$, donc avec l'ajustement exponentiel on peut s'attendre à un trafic de :
   $20,989\mathrm{e}^{0,055\times 31} \approx 115,47$, soit une augmentation en pourcentage à partir de 2008 de
   $$\frac{115,47 - 97,2}{97,2} \times 100 \approx 17,9\,\%$$
   Les prévisions ne sont pas cohérentes avec l'ajustement exponentiel.

Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. On a sur l'intervalle $[0,5\,;\,25]$:
   $f'(x) = 18 \times \dfrac{1}{x} - 2x + 16 = \dfrac{18 - 2x^2 + 16x}{x} = \dfrac{2\left(-x^2 + 8x + 9\right)}{x}$.
2. Comme $x \geqslant 0,5 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur qui est un trinôme.
   $\Delta = 64 + 36 = 100 = 10^2$, donc ce trinôme a deux racines :
   $x_1 = \dfrac{-8 + 10}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-8 - 10}{-2} = 9$.
   Ce trinôme est négatif sauf entre x_1 et x_2.
   Donc la fonction est croissante sur l'intervalle $[0,5\,;\,9]$ et décroissante sur $[9\,;\,25]$.

3. **a.** $f(1) = 18 \times \ln 1 - 1^2 + 16 \times 1 - 15 = 0$.

b. On a vu que sur $[9\,;\,25]$ et donc en particulier sur $[18\,;\,19]$, la fonction f est décroissante de $f(18) = 18\ln 18 - 18^2 + 16 \times 18 - 15 = 18\ln 18 - 51 \approx 1,03$ à $f(19) = 18\ln 19 - 19^2 + 16 \times 19 - 15 = 18\ln 19 - 72 \approx -19$.

Sur l'intervalle $[18\,;\,19]$, la fonction f est continue car dérivable, strictement décroissante d'une valeur supérieure à zéro à une valeur in fréteur à zéro : il existe donc un réel unique α de $[18\,;\,19]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$f(18) \approx 1,03$ et $f(18,1) \approx -0,9$, donc $18 < \alpha < 18,1$;

$f(18,05) \approx 0,07$ et $f(18,06) \approx -0,1$, donc $18,05 < \alpha < 18,06$.

c. On a le tableau de variations suivant :

x	$0,5$	1	9	α	25
$f(x)$	$\approx -19,7$	0	$\approx 87,6$	0	≈ -182

On en déduit que f est positive sur $[1\ ;\ \alpha]$ et négative ailleurs.

4. D'après la question précédente il faut pour que l'entreprise soit bénéficiaire qu'elle produise entre 100 et 1 806, soit de 101 à 1 805 panneaux.

5. 100 000 € correspondent à $f(x) = 100$; or on a vu que le maximum de f est $f(9) \approx 87,6 < 100$. La réponse est non.

PARTIE B

1. La primitive de la fonction $x \longmapsto -x^2 + 16x - 15$ est la fonction

$x \longmapsto -\dfrac{x^3}{3} + 16\dfrac{x^2}{2} - 15x = -\dfrac{x^3}{3} + 8x^2 - 15x$.

Donc une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\,;\,25]$ est définie par :

$F(x) = 18(x\ln x - x) - \dfrac{x^3}{3} + 8x^2 - 15x = 18x\ln x - \dfrac{x^3}{3} + 8x^2 - 33x$.

2. Soit B_m la valeur moyenne du bénéfice mensuel de l'entreprise lorsque celle-ci produit et vend entre 100 et 1 800 panneaux solaires.

$B_m = \dfrac{1}{18-1}\displaystyle\int_1^{18} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{17}[F(x)]_1^{18} = \dfrac{1}{17}[F(18) - F(1)] =$

$\dfrac{1}{17}\left[18 \times 18\ln 18 - \dfrac{18^3}{3} + 8 \times 18^2 - 33 \times 18 - \left[18(1\ln 1 - 1) - \dfrac{1^3}{3} + 8 \times 1^2 - 33 \times 1\right)\right] =$

$\dfrac{1}{17}\left[324\ln 18 + 54 + \dfrac{76}{3}\right] = \approx 59,75$ soit environ 59 800 €.