Durée : 3 heures

∽ Corrigé du baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2010 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** $\dfrac{0,21}{447} \approx 0{,}00047$: la part du chiffre d'affaires du commerce équitable par rapport à celui du commerce de détail est d'environ 0,047 % du chiffre d'affaires du commerce de détail.

   b. On est passé de 120 à 256 soit une augmentation de $\dfrac{256-120}{120} \times 100 \approx 113,3$ soit à l'unité près une augmentation de 113 %.

2. Ajustement affine

   a.

   b. La calculatrice donne $y = 36,8x - 54$ avec des coefficients arrondis au dixième.
   Voir le tracé à la fin.

   c. Il faut trouver l'entier n le plus petit tel que :
   $36,8n - 54 \geqslant 2 \times 120 \iff 36,8n \geqslant 474 \iff n \geqslant \dfrac{474}{36,8}$.
   Or $\dfrac{474}{36,8} \approx 12,9$. Il faut donc attendre au moins 13 ans donc pas avant 2013.

3. Ajustement parabolique

   Résolution numérique : il faut trouver le plus petit entier n vérifiant :
   $3n^2 + 7n - 4 \geqslant 420 \iff 3n^2 + 7n - 424 \geqslant 0$.
   Pour l'équation $3n^2 + 7n - 424 = 0$, on calcule $\Delta = 49 + 12 \times 424 = 5137 > 0$: il y a donc deux racines :
   $x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{5137}}{6} \approx -13,1$ et $x_1 = \dfrac{-7+\sqrt{5137}}{6} \approx 10,8$.
   On sait que le trinôme est positif ce que l'on cherche sauf entre les racines donc en particulier entre 0 et 10,8.
   Le plus petit entier qui convient est donc $n = 11$.
   D'après ce modèle, en 2011 le chiffre d'affaires du commerce équitable sera plus du double du chiffre de celui de 2007.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On a $p(F) = \dfrac{720}{1200} = 0,6$, $p(T) = \dfrac{618}{1200} = 0,515$ et $p\left(\overline{T}\right) = 1 - p(T) = 0,485$.
2. $F \cap T$ est l'évènement : « l'employé est une femme qui choisit le train ».
   On a $p(F \cap T) = \dfrac{468}{1200} = 0,39$.
   On a $p(T) \times p(F) = 0,515 \times 0,6 = 0,309 \neq 0,39 = p(F \cap T)$, donc les évènements T et F ne sont pas indépendants.

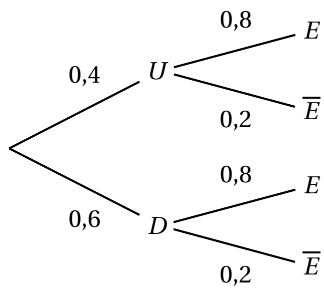
3. On a $p_{\overline{T}}(F) = \dfrac{p(\overline{T} \cap F)}{p(\overline{T})}$.

Or il y a $196 + 56 = 252$ femmes qui ne prennent pas le train, d'où $p(\overline{T} \cap F) = \dfrac{252}{1\,200} = 0,21$.

Donc $p_{\overline{T}}(F) = \dfrac{0,21}{0,485} \approx 0,433$.

Partie B

1.



2. Les évènements D et E étant indépendants on sait :
$p(D \cap E) = p(D) \times p(E) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$.

3. a. — Formule 1 seule : $C = 150$;
— Formule 1 et excursion facultative : $C = 150 + 30 = 180$;
— Formule 2 seule : $C = 100$;
— Formule 2 et excursion facultative : $C = 100 + 30 = 130$

b. Il reste à calculer :
$p\left(D \cap \overline{E}\right) = p(D) \times p\left(\overline{E}\right) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$
$p(U \cap E) = p(U) \times p(E) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$
$p\left(D \cap \overline{E}\right) = p(D) \times p\left(\overline{E}\right) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$.
D'où le tableau de la loi de probabilité suivant :

Coût total en € C_i	100	130	150	180
Probabilité p_i	0,12	0,48	0,08	0,32

c. L'espérance de cette loi est égale à :
$E = 100 \times 0,12 + 130 \times 0,48 + 150 \times 0,08 + 180 \times 0,32 = 12 + 62,4 + 12 + 57,6 = 144$ €.
Ceci signifie qu'en moyenne le coût par participant est de 144 €.

EXERCICE 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

1. Dans la partie droite du tableau de variations on voit que :
— sur $]0\,;\,\ln 2]$ la fonction f est décroissante de plus l'infini à $2\ln(2) + 3 \approx 4,38$; d'autre part $\mathrm{e}^2 \approx 7,39$. Comme f est continue car dérivable sur cet intervalle d'après le théorème de la valeur intermédiaire il existe un réel $x_0 \in]0\,;\,\ln 2[$ tel que $f(x_0) = \mathrm{e}^2$;
— Même raisonnement sur l'intervalle $[\ln 2\,;\,+\infty[$: comme $\mathrm{e}^2 \in [\ln(2) + 3\,;\,+\infty[$ il existe un réel unique $x_1 \in [\ln 2\,;\,+\infty[$ tel que $f(x_1) = \mathrm{e}^2$
L'équation a donc deux solutions.

2. On a $f'(x) = 2 + \dfrac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1\right) - \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2} = 2 + \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2} = 2 + \dfrac{-\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2} =$

Donc $f'(\ln 1,5) = \dfrac{-\mathrm{e}^{\ln 1,5}}{\left(\mathrm{e}^{\ln 1,5} - 1\right)^2} = 2 - \dfrac{1,5}{(1,5 - 1)^2} = 2 - \dfrac{1,5}{0,25} = 2 - 6 = -4$.

La tangente est dirigée vers le bas.

3. $f[-\ln(2)] = 2(-\ln 2) + 1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-\ln(2)}}{\mathrm{e}^{-\ln(2)} - 1} = 1 - 4\ln 2 + \dfrac{\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}}}{\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} - 1} = 1 - 4\ln 2 + \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - 4\ln 2 + \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} =$

$1 - 4\ln 2 - 1 = -2\ln 2 = -\ln 2^2 = -\ln 4 = \ln 1 - \ln 4 = \ln \dfrac{1}{4}$.

4. On a $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$; or on sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1$ et enfin : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x + 2)] = 0$, ce qui montre que la droite dont une équation est $y = 2x + 2$ est asymptote (oblique) à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. a. On lit $f(1) = 0$, $f(2) = 4$, $f(4) = 0$ et $f'(2) = 0$.

b. $f(1) = 0 \iff a + b - 16 = 0$ et
$f(4) = 0 \iff 4a + b - 4 = 0$ donnent par différence $3a + 12 = 0 \iff a = -4$, puis $b = 16 - a = 16 - (-4) = 20$.

2.

$$f(x) = -4x + 20 - \frac{16}{x}.$$

a. Comme $x \neq 0$ la fonction est dérivable sur $[1 ; 6]$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = -4 + \dfrac{16}{x^2} = \dfrac{16 - 4x^2}{x^2} = \dfrac{4\left(4 - x^2\right)}{x^2} = \dfrac{2(2 + x)(2 - x)}{x^2}$.
Comme sur $[1 ; 6]$, $x^2 > 0$, $2 + x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2 - x$.
Donc si $1 \leqslant x < 2$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante et
si $2 < x \leqslant 6$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante ce qui correspond bien au graphe de f.

b.

x	1		2		4		6
f	0	↗	4	↘	0	↘	

c. On lit sur le tableau de variations que :
sur $[1 ; 4[$ $f(x) > 0$ et sur $]4 ; 6]$, $f(x) < 0$.

3. a. Sur $[1 ; 6]$, F est dérivable et sur cet intervalle :
$F'(x) = -4x + 20 - \dfrac{16}{x} = f(x)$.
D'autre part $F(1) = -2 + 20 - 18 - 16\ln 1 = 20 - 20 = 0$.
Donc est bien **la** primitive de f qui s'annule en 1.

b. Puisque $F'(x) = f(x)$, le signe de $f(x)$ donne le signe de la dérivée de F donc ses variations :
- sur $[1\,;\,4[$, $F'(x) > 0$, donc F est croissante de $F(1) = 0$ à $F(4) = -32 + 80 - 18 - 16\ln 4 = 30 - 16\ln 4 \approx 7,819$.
- sur $[4\,;\,6]$n $F'(x) < 0$, donc F est décroissante de $F(4) \approx 7,819$ à $F(6) = -72 + 120 - 18 - 16\ln 6 = 30 - 16\ln 16 \approx 1,332$.

PARTIE B

1. La fonction « bénéfice » est la fonction F. On a vu dans la dernière question de la partie A que le maximum de F est obtenu pour $x = 4$ et que $F(4) \approx 7,819$.
   Donc le bénéfice est maximum pour une production de 400 pièces et ce bénéfice est environ de 7 819 €.
2. Il faut résoudre l'inéquation $F(x) > 3$.
   On voit qu'il y a une solution pour l'équation $F(x) = 3$ sur l'intervalle $[1\,;\,4]$ et une sur l'intervalle $[2\,;\,4]$.
   La calculatrice donne :
   $F(2,02) \approx 2{,}949\,6$ et $F(2,03) \approx 3{,}029\,6$;
   $F(5,73) \approx 3{,}002\,8$ et $F(5,74) \approx 2{,}945\,5$.
   Pour réaliser un bénéfice supérieur à 3 000 € il faut produire plus de 202 pièces et moins de 574.