Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2009

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Augmenter de 1,8 % chaque année c'est multiplier par $1+\dfrac{1,8}{100}=1,018$.

   En quarante ans la population est donc multipliée par $1,018^{40}\approx 2,04$.

   L'affirmation est exacte.

2. **a.** $T=\dfrac{6080-3014}{3014}\times 100\approx 101,7\,\%$.

   b. De 1960 à 2000, la population a été multipliée par $\dfrac{6080}{3014}\approx 2,017$.

   Si t est le taux d'évolution annuel moyen entre 1960 et 2000, on sait que t vérifie :

   $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^{40}\approx 2,017$.

   On a donc $1+\dfrac{t}{100}\approx 2,017^{\frac{1}{40}} \iff \dfrac{t}{100}\approx 2,017^{\frac{1}{40}}-1 \iff \dfrac{t}{100}\approx 0,018 \iff$ $t\approx 1,8\ \%$.

3. L'estimation de la population en 2008 est :

   $6080\times 1,018^{8}\approx 7012$ millions soit environ 7 000 millions ou 7 milliards.

4. **a.** La calculatrice donne $y=76,5x+2956,2$.

   b. Avec ce modèle comme 20008 correspond à $x=48$, on a une projection de :

   $76,5\times 48+2956,2=6628,2\approx 6600$ millions, soit 6,6 milliards d'habitants.

5. C'est donc l'approximation affine qui est la meilleure.

Exercice 2 **4 points**

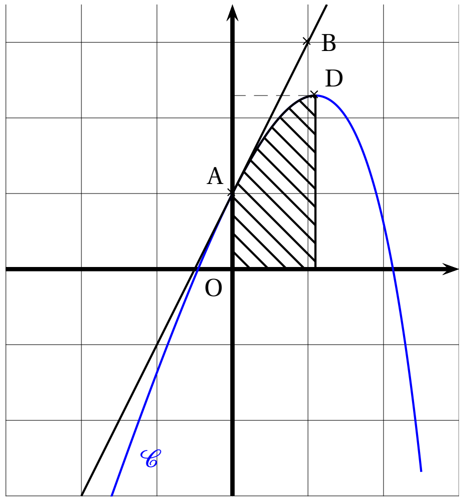
Commun à tous les candidats

1. -1 n'a pas d'image par f ; f ne s'annule pas et effectivement $f(1)=-1$.
2. La courbe a deux asymptotes d'équation $x=\text{e}$ et $y=0$.
3. Le nombre dérivé en 4 est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 4 ; on voit que ce nombre est négatif.
4. Les réponses 2 et 3 sont fausses visuellement.

   La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[4\,;\,6]$, donc la première affirmation est exacte.

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats



1. • $\mathscr{C}$ passe par A(0 ; 1), donc $1 = a + c$.
   • B est le point de coordonnées (1 ; 3) ; la droite (AB) est tangente à $\mathscr{C}$ au point A. Donc le coefficient directeur de la droite (AB) est : $\dfrac{3-1}{1-0} = 2 = f'(0)$, nombre dérivé au point d'abscisse 0.
   • $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point D d'abscisse ln 3 signifie $f'(\ln 3) = 0$.

2. On a $f'(x) = a\text{e}^x + b$, donc $f'(0) = a + b$ et $f'(\ln 3) = a\text{e}^{\ln 3} + b = 3a + b$.
   Les nombres a, b et c vérifient donc le système :
   $$\left\{\begin{array}{l c l} a+c & = & 1\\ a+b & = & 2\\ 3a+b & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} a+c & = & \\ a+b & = & 2\\ 2a & = & -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} c & = & 1-a\\ b & = & 2-a\\ a & = & -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} c & = & 2\\ b & = & 3\\ a & = & -1\end{array}\right.$$
   On a donc $f(x) = -\text{e}^x + 3x + 2$.

3. **a.** On a donc $f'(x) = -\text{e}^x + 3$. D'où :
   • $f'(x) = 0 \iff \text{e}^x = 3 \iff x = \ln 3$;
   • $f'(x) < 0 \iff \text{e}^x > 3 \iff x > \ln 3$;
   • $f'(x) > 0 \iff \text{e}^x < 3 \iff x < \ln 3$.
   La fonction est donc croissante sur $[-2~;~\ln 3]$ et décroissante sur $[\ln 3~;~3]$.
   $f(\ln 3) = -\text{e}^{\ln 3} + 3\ln 3 + 2 = -3 + 3\ln 3 + 2 = 3\ln 3 - 1$ est le maximum de la fonction sur l'intervalle $[-2~;~3]$.

   b. Sur l'intervalle $[-2~;~\ln 3]$ la fonction f est continue, car dérivable, strictement croissante de $f(-2) = -\text{e}^{-2} + 3 \times (-2) + 2 = -4 - \text{e}^{-2} < 0$ à $f(\ln 3) = 3\ln 3 - 1 > 0$; d'après le théorème de la valeur intermédiaire f s'annule donc une seule fois sur cet intervalle pour $\alpha \in [-2~;~\ln 3]$.
   La calculatrice donne :
   $f(-1) \approx -1,4$ et on sait que $f(0) = 1$, donc $-1 < \alpha < 0$.
   $f(-0,5) \approx -0,1$ et $f(-0,4) \approx 0,13$, donc $-0,5 < \alpha < -0,4$.
   $f(-0,46) \approx -0,01$ et $f(-0,45) \approx 0,012$, donc $-0,46 < \alpha < -0,45$.
   On a $\alpha \approx -0,46$ au centième près.

   c. Comme f décroit sur $[\ln 3~;~3]$ et s'annule en β, on a donc :
   $f(x) > 0$ sur $]\alpha~;~\beta[$;
   $f(x) < 0$ sur $[-2~;~\alpha[$ et sur $]\beta~;~3]$;
   $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

4. **a.** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto -\text{e}^x$ est $x \longmapsto -\text{e}^x$, donc une primitive sur $[-2~;~3]$ de $x \longmapsto f(x)$ est $x \longmapsto F(x) = -\text{e}^x + \dfrac{3x^2}{2} + 2x$.

b. Voir la figure.

c. On a vu que sur l'intervalle $[0\ ;\ \ln 3]$, $f(x) > 0$, donc l'aire de la surface délimitée par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $x = \ln 3$ est égale, en unités d'aire à l'intégrale :

$$\int_0^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{\ln 3} = F(\ln 3) - F(0) =$$

$$-\mathrm{e}^{\ln 3} + \frac{3(\ln 3)^2}{2} + 2\times\ln 3 - \left(-\mathrm{e}^0 + \frac{3\times 0^2}{2} + 2\times 0\right) = -3 + \frac{3(\ln 3)^2}{2} + 2\ln 3 + 1 =$$

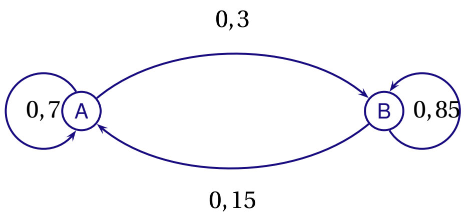
$\dfrac{3(\ln 3)^2}{2} + 2\ln 3 - 2 \approx 2{,}007$ soit au centième près 2,00 unité d'aire. (ce que l'on vérifie approximativement sur la figure).

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On a le graphe probabiliste suivant :



2. La matrice de transition, notée M, associée à cette situation en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique est $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

3. L'état initial est $P_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

4. **a.** On a $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0,8\times 0,7 + 0,2\times 0,15 & 0,8\times 0,3 + 0,2\times 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \end{pmatrix}$.

Ce résultat signifie que le jour 2, 59 % des touristes prendront le bus, les 41 % restants prenant la bicyclette.

b. On a $P_6 = P_1 \times M^5 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,367 & 0,633 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,357 & 0,643 \end{pmatrix}$.

Le jour 6, environ 36 % des touristes prendront le bus, les 64 % restants prenant la bicyclette.

5. Les coefficients de M ne sont pas nuls : il existe donc un état stable indépendant de l'état initial ; cet état stable $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$, vérifie l'égalité :

$$P = P\times M \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0,7x + 0,15y \\ y & = & 0,3x + 0,85y \\ x + y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,3x - 0,15y & = & 0 \\ -0,3x + 0,15y & = & 0 \\ x + y & = & 1 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0,3x - 0,15y & = & 0 \\ y & = & 1 - x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,3x - 0,15(1-x) & = & 0 \\ y & = & 1 - x \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0,45x & = & 0,15 \\ y & = & 1 - x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{3} \\ y & = & 1 - x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{3} \\ y & = & \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

L'état stable du système est $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

On bout d'un certain nombre de jours, un tiers des touristes prendront le bus.

6. Le n-ième jour on a la matrice de l'état probabiliste $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ avec $a_n + b_n = 1$.

On sait que $P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,7a_n + 0,15b_n \\ a_n + b_n & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,7a_n + 0,15(1 - a_n) \\ b_n & = & 1 - a_n \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,55a_n + 0,15 \\ b_n & = & 1 - a_n \end{array}\right.$

Ainsi pour $1 \leqslant n \leqslant 30$, $a_{n+1} = 0,55a_n + 0,15$.

Partie B

1. On a $U_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = 0,55u_n + 0,15 - \dfrac{1}{3} = 0,55u_n + \dfrac{0,45 - 1}{3} = 0,55u_n - \dfrac{0,55}{3} = 0,55\left(u_n - \dfrac{1}{3}\right) = 0,55U_n$.

Cette égalité montre que la suite (U_n) est géométrique de raison 0,55 et de premier terme $U_1 = u_1 - \dfrac{1}{3} = 0,8 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2,4 - 1}{3} = \dfrac{1,4}{3} = \dfrac{7}{15}$.

2. On sait que $U_n = U_1 \times 0,55^{n-1} = \dfrac{7}{15} \times 0,55^{n-1}$.

Or $U_n = u_n - \dfrac{1}{3} \iff u_n = U_n + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{15} \times 0,55^{n-1}$.

3. On sait que comme $0 < 0,55 < 1$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0,55^n = 0$, donc par somme de limites :

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$. On retrouve le résultat de la partie A. À terme un tiers des touristes prendra le bus.