Durée : 3 heures

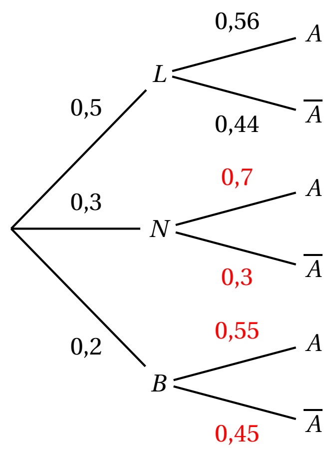
Corrigé du baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2008

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

exemple

1.



2. On a $p_L(A) = 0,56$ (énoncé).

3. $p(L \cap A) = p(L) \times p_L(A) = 0,5 \times 0,56 = 0,28$.

4. On a donc $p(N \cap A) = 0,21$.

$p_N(A) = \dfrac{p(N \cap A)}{p(N)} = \dfrac{0,21}{0,3} = \dfrac{21}{30} = \dfrac{7}{10} = 0,7$.

5. On a donc $p(A) = 0,6$.

a. D'après la loi des probabilités totales :

$p(A) = p(L \cap A) + p(N \cap A) + p(B \cap A) \iff 0,6 = 0,28 + 0,21 + p(B \cap A) \iff p(B \cap A) = 0,6 - 0,49 = 0,11$.

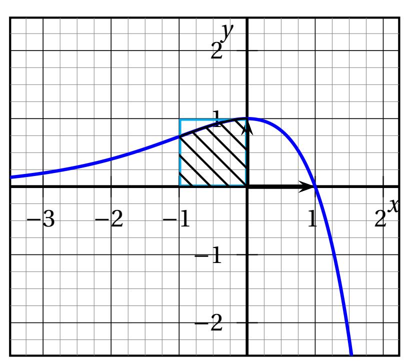
b. $p_B(A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(B)} = \dfrac{0,11}{0,2} = \dfrac{11}{20} = 0,55$.

6. On a une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = p(A) = 0,6$.

La probabilité qu'il y ait un seul chocolat garni de praliné est : $2 \times 0,6 \times (1 - 0,6) = 2 \times 0,6 \times 0,4 = 0,48$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Partie A

1. $f(x) = (1-x)\text{e}^x = \text{e}^x - x\text{e}^x$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^x = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\text{e}^x = 0$ par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   Géométriquement cela signifie que l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.
2. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^x = +\infty$, d'où par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3. Comme $\text{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f(x)$ est celui de $1-x$.
   - $1-x>0 \iff x<1 : f(x)>0$ sur $]-\infty\ ;\ 1[$;
   - $1-x<0 \iff x>1 : f(x)<0$ sur $]1\ ;\ +\infty[$;
   - $1-x=0 \iff x=1 : f(1)=0$.

Partie B

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $F'(x) = -1\text{e}^x + (-x+2)\text{e}^x = \text{e}^x(-1-x+2) = \text{e}^x(-x+1) = f(x)$: F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** On a vu que pour $x<1$, $f(x)>0$, donc l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=0$ est égale à l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\text{d}x$.

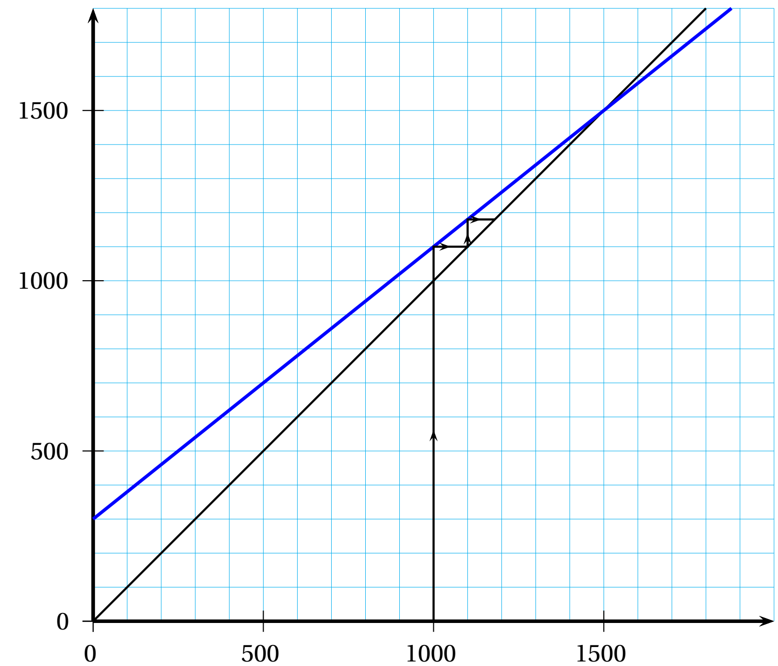
   b. On voit sur le graphique que l'aire $\mathscr{A}$ est inférieure à celle du carré de côté 1 en couleur, donc : $0 < \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\text{d}x < 1$.

   c. On a donc : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_{-1}^{0} = F(0) - F(-1) = (-0+2)\text{e}^0 - \left[(-(-1)+2)\text{e}^{-1}\right] = 2 - 3\text{e}^{-1} \approx 0,896 \approx 0,90$ unité d'aire au centième près.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. $u_2 = 1\,000 - 0,2\times 1\,000 + 300 = 1\,000 - 200 + 300 = 1\,100$;
   $u_3 = 1\,100 - 0,2\times 1\,100 + 300 = 1\,100 - 220 + 300 = 1\,180$.
2. Enlever 20 % c'est multiplier par 0,8. Donc d'une année sur l'autre l'effectif est multiplié par 0,8 puis augmenté de 300, soit :
   $u_{n+1} = 0,8\times u_n + 300$.
3.



En partant du point (1 000 ; 0) et en allant « vers le haut » jusqu'à la droite $y = 0,8x+300$ et « vers la droite » jusqu'à la droite $y = x$, on constate que la suite semble converger vers l'abscisse du point commun aux deux droites donc vers 1 500.

4. **a.** Pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = 1500 - u_{n+1} = 1500 - (0,8u_n + 300) =$
$1200 - 0,8u_n = 0,8\left(\frac{1200}{0,8} - u_n\right) = 0,8(1500 - u_n) = 0,8v_n$.
L'égalité vraie pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = 0,8v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8, de premier terme $v_1 = 1500 - u_1 = 1500 - 1000 = 500$.

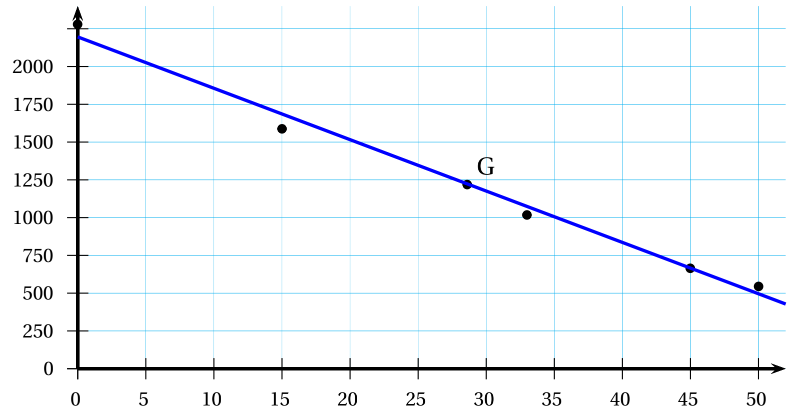
b. On a pour tout naturel non nul :
$v_n = 0,8^{n-1}v_1 = 500 \times 0,8^{n-1}$
Comme $0 < 0,8 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
Or $v_n = 1500 - u_n \iff u_n = 1500 - v_n$, donc :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 500$: le nombre de donateurs va se stabiliser vers 1 500.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : un ajustement affine

1. **a.**



   b. On trouve G(28,6 ; 1 218,8). Voir la figure.

2. **a.** On obtient comme équation de la droite d'ajustement : $y = -34x + 2\,196$.

   b. Voir le graphique plus haut.

3. 2008 correspond au rang 53, d'où $y = -34 \times 53 + 2\,196 = 394$.

Partie B : une autre estimation

1. Le pourcentage de diminution du nombre d'exploitations agricoles entre 2000 et 2005 est égal à $\dfrac{664-545}{664} \times 100 \approx 17,92$ soit au dixième près 17,9 %.
2. On calcule : $664 \times (1-0,0387)^5 \approx 545,03$ soit environ 545 à l'unité près.
3. Le nombre d'exploitations agricoles que l'on peut prévoir en 2008 est égal à
   $545 \times (1-0,0387)^3 \approx 484,1$ soit environ 484 à l'unité près soit 484 000 exploitations agricoles.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(4x+10) = \ln 10$ et $\lim\limits_{x\to 0} = -\infty$, d'où par somme de limites :
   $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
   Géométriquement ce résultat signifie que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.
2. La fonction f est dérivable sur]0 ; 20] et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} \times 4 \times \dfrac{1}{4x+10} - 3 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4x+10} - \dfrac{3}{x} =$
   $\dfrac{x(4x+10)+6x-6(4x+10)}{2x(4x+10)} = \dfrac{4x^2+10x+6x-24x-60}{x(4x+10)} = \dfrac{4x^2-8x-60}{2x(2x+5)} = \dfrac{2x^2-4x-30}{2x(2x+5)} =$
   $\dfrac{x^2-2x-15}{x(2x+5)}$.
3. Comme $x > 0$, $2x+5 > 0$: le dénominateur est positif : le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur ; celui-ci est un trinôme : il est positif (car $a = 1 >$) sauf entre ses racines.
   Or $\Delta = 4 + 60 = 64 = 8^2 >$. Les racines sont $x_1 = \dfrac{2+8}{2} = 5$ et $x_2 = \dfrac{2-8}{2} = -3$.
   Donc $2x^2 - 4x - 30 < 0$ sur]0 ; 5[et $2x^2 - 4x - 30 > 0$ sur]5 ; 20[.
   La fonction est donc décroissante sur]0 ; 5[et croissante sur]5 ; 20[.

Partie B

1. **a.** On a vu dans la question précédente que $f(5)$ est le minimum de f sur $[0\,;\,30]$.
   Le coût moyen de fabrication est donc minimal pour une production de 5 000 objets.

   b. $f(5) == \dfrac{1}{2}\times 5+4+\dfrac{3}{4}\ln(4\times 5+10)-3\ln 5=\dfrac{13}{2}+\dfrac{3}{4}\ln(30)-3\ln 5\approx 4,222$ soit environ 4,22 € quand on produit 5 000 objets.

2. On a admis que l'équation $f(x)=6$ a deux solutions $\alpha\approx 1,242$ et $\beta\approx 13,311$. Les productions journalières sont donc respectivement 1 242 et 13 311.
   Sur l'intervalle $\alpha\,;\,5]$, $f(x)<6$: le coût est inférieur au prix de vente il y a bénéfice.
   Sur l'intervalle $[5\,;\,\beta[$, $f(x)<6$: il y a bénéfice.
   Conclusion : il y a bénéfice quand l'usine produit entre 1 242 et 13 311 objets.

3. Si $x=5$, alors le bénéfice est :
   $5000(6-4,22)=5000\times 0,78=8900$ €.

4. L'année suivante le coût moyen est $1,02f(x)$ fonction qui a les mêmes variations que f, donc le même minimum en $x=5$. Le nouveau prix de vente est $1,02\times 6$.
   Le bénéfice est donc $1,02\times 6-1,02f(x)=1,02\left[6-f(x)\right]$ ce qui montre que le bénéfice augmente de 2 %.