Baccalauréat ES Antilles-Guyane
19 juin 2012

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On donne le prix moyen en euros d'un litre de gasoil en France, entre 1998 et 2007 :

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Prix moyen y_i du litre de gasoil (en euros)	0,77	0,81	0,73	0,79	0,8	0,85	0,99	1,06	1,1	1,11

Source : *Annuaire Statistique de la France*

1. Calculer le pourcentage d'évolution, arrondi à 0,1 % près, du prix moyen d'un litre de gasoil en euros entre 1998 et 2007.
2. **a.** Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i~;~y_i\right)$, avec i compris entre 0 et 9, associé à cette série statistique, dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

   On choisira les unités graphiques suivantes :

   1 cm pour 1 année sur l'axe des abscisses.

   1 cm pour 10 centimes d'euros sur l'axe des ordonnées.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série et le placer dans le repère précédent.
3. On modélise l'évolution du prix moyen d'un litre de gasoil en euros à l'aide d'un ajustement affine, obtenu par la méthode des moindres carrés.

   Donner l'équation de la droite de régression de y en x ainsi obtenue, en arrondissant les coefficients au millième.

   Tracer cette droite dans le repère défini à la question 2.
4. Avec ce modèle, calculer l'estimation du prix moyen d'un litre de gasoil en euros en 2010. Arrondir le résultat au centime d'euros.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   En supposant que le modèle reste valable durablement, à partir de quelle année le prix moyen du litre de gasoil aura-t-il augmenté de 30 % par rapport au prix moyen de l'année 2007 ?

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un restaurant propose une formule « entrée + plat » pour laquelle chaque client choisit entre trois entrées (numérotées 1, 2 et 3) puis entre deux plats (numérotés 1 et 2).

Chaque client qui choisit cette formule prend une entrée et un plat.

On a constaté que :

30% des clients choisissent l'entrée n° 1, 24 % choisissent l'entrée n° 2 et les autres clients choisissent l'entrée n° 3.

Par ailleurs, le plat n° 1 est choisi par : 72 % des clients ayant opté pour l'entrée n° 1, 58 % des clients ayant opté pour l'entrée n° 2 et 29 % des clients ayant opté pour l'entrée n° 3.

On choisit au hasard un client du restaurant ayant opté pour la formule « entrée + plat ».

On note E_1 l'évènement : « Le client choisi l'entrée n° 1 », E_2 l'évènement : « Le client choisi l'entrée n° 2 » et E_3 l'évènement : « Le client choisi l'entrée n° 3 ».
On note enfin P_1 l'évènement : « Le client choisi le plat n° 1 » et P_2 l'évènement : « Le client choisi le plat n° 2 ».

1. Traduire la situation étudiée à l'aide d'un arbre pondéré, en indiquant sur cet arbre les probabilités données dans l'énoncé.
2. Quelle est la probabilité que le client choisisse l'entrée n° 3 et le plat n° 1 (on donnera la valeur exacte de cette probabilité) ?
3. Montrer que la probabilité de l'évènement P_1 est égale à 0,488 6.
4. Quelle est la probabilité qu'un client ait choisi l'entrée n° 1 sachant qu'il a pris le plat n° 1 (on arrondira le résultat à 10^{-4} près) ?
5. On choisit trois clients au hasard parmi ceux ayant opté pour la formule ; on suppose le nombre de clients suffisamment grand pour assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise. Dans cette question, on arrondira les résultats au millième.

   a. Déterminer la probabilité qu'exactement deux de ces clients aient pris le plat n° 1.

   b. Déterminer la probabilité qu'au moins un client ait pris le plat n° 1.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une grande entreprise, tous les agents commerciaux ont une voiture de fonction, qu'ils doivent choisir entre deux marques A et B. Le parc de véhicules (en location) est renouvelé tous les ans.

On suppose que le nombre d'agents commerciaux de l'entreprise ne varie pas, et que les deux marques A et B restent les seules possibilités pour les voitures de fonction proposées dans l'entreprise.

On a constaté que, chaque année :
- 5 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque A changent l'année suivante pour B ;
- 15 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque B changent l'année suivantes pour A ;
- les autres agents poursuivent l'année suivante avec un véhicule de même marque.

On appelle a_n la probabilité qu'un agent commercial choisi au hasard utilise un véhicule de marque A au début de l'année $2010 + n$, et b_n la probabilité qu'il utilise un véhicule de marque B au début de cette même année.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.

En 2010, la moitié des agents commerciaux possédaient un véhicule de marque A ; ainsi : $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, et donner la matrice de transition M (on considèrera les sommets du graphe dans l'ordre alphabétique).
2. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$ et donner une interprétation concrète des coefficients de cette matrice.
3. Déterminer l'état probabiliste stable du système et interpréter les résultats obtenus.

4. **a.** Que vaut, pour tout entier naturel n, la somme $a_n + b_n$?

   b. On sait, pour tout entier naturel n, que $P_{n+1} = P_n \times M$; démontrer, pour tout entier naturel n, que $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}15$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = a_n - 0{,}75$.

   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométriques de raison 0,8 dont on précisera le premier terme.

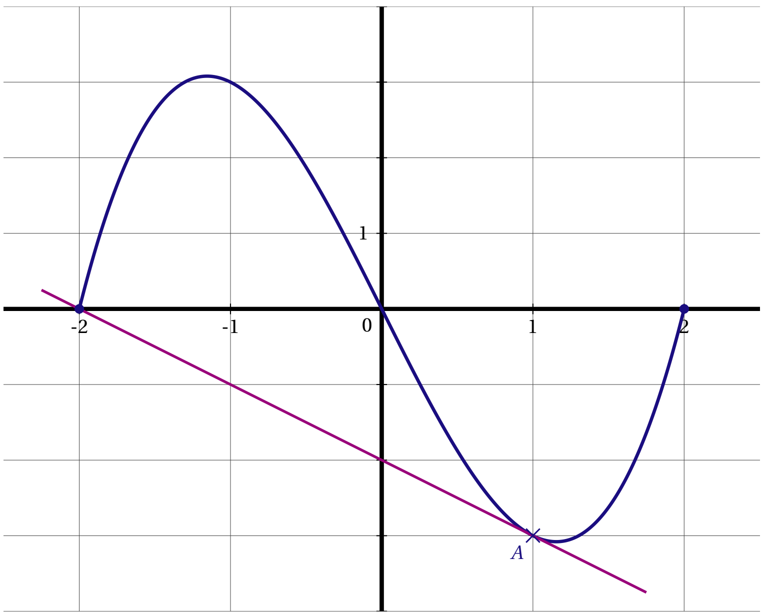
   b. Exprimer u_n en fonction de n, puis démontrer que pour tout entier naturel n,

$$a_n = -0{,}25 \times 0{,}8^n + 0{,}75.$$

   c. Déterminer la limite de la suite (a_n). Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2~;~2]$, et sa tangente en son point A d'abscisse 1 ; cette tangente passe par le point de coordonnées $(0~;~-2)$. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[-2~;~2]$.
Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est exacte ; préciser laquelle sur la copie. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.



1. Le nombre dérivé noté $f'(1)$ est égal à :

   a. 1 **b.** $-\dfrac{1}{3}$ **c.** -1 **d.** 3

2. La fonction u telle que $u(x) = \ln\left[f(x)\right]$ est définie sur :

   a. $[-2~;~0]$ **b.** $]-2~;~0[$ **c.** $]0~;~2[$ **d.** $[0~;~2]$

3. On considère F une primitive de f sur l'intervalle $[-2~;~2]$.
   La fonction F est décroissante sur :

   a. $[-2~;~0]$ **b.** $[-2~;~2]$ **c.** $[0~;~2]$ **d.** $[-1~;~1]$

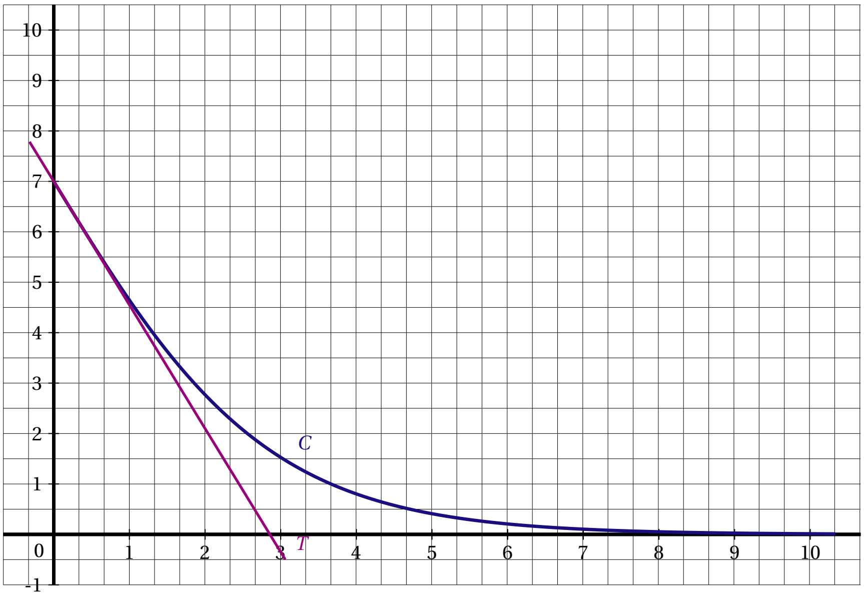
4. Soit $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$. On a :

a. $I < 0$ **b.** $0 \leqslant I \leqslant 1$ **c.** $1 < I < 3$ **d.** $I \geqslant 3$

Exercice 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

On a représenté ci-dessous la courbe C d'une fonction g définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ ainsi que la tangente T à cette courbe en son point de coordonnées $(0\,;\,7)$. On admet que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe C au voisinage de $+\infty$. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.



PARTIE A

1. Préciser la valeur du réel $g(0)$.
2. On admet que la tangente T passe par le point de coordonnées $(4\,;\,-2,8)$. Justifier que la valeur exacte de $g'(0)$ est $-2,45$.
3. Préciser la valeur de la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. On admet que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{a}{\mathrm{e}^{bx}+1}$$

où a et b sont des nombres réels.

a. Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$, on a $g'(x) = \dfrac{-ab\mathrm{e}^{bx}}{\left(\mathrm{e}^{bx}+1\right)^2}$.

b. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, déterminer les valeurs des réels a et b.

PARTIE B

On considère un objet manufacturé dont le prix unitaire est x, en centaines d'euros. D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ pour cet objet, en centaines d'unités, sont définies pour tout x positif ou nul par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,7x} - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{14}{\mathrm{e}^{0,7x}+1}$$

1. Si le prix de vente unitaire de l'objet est 300 €, combien d'objets (à l'unité près) les consommateurs sont-ils prêts à acheter.
2. Calculer le prix de vente unitaire de l'objet, arrondi à l'euro près, pour que la demande soit de 350 objets.
3. **a.** Déterminer l'unique solution de l'équation $f(x) = g(x)$, et donner une valeur approchée au centième de cette solution.

   On appelle « prix d'équilibre » le prix permettant l'égalité entre l'offre et la demande. Quel est le prix d'équilibre, arrondi à l'euro près

   b. Au prix d'équilibre, quelle est la valeur commune de l'offre et de la demande, arrondie à l'unité près ?

   Quel est le chiffre d'affaire généré par les ventes au prix d'équilibre ?