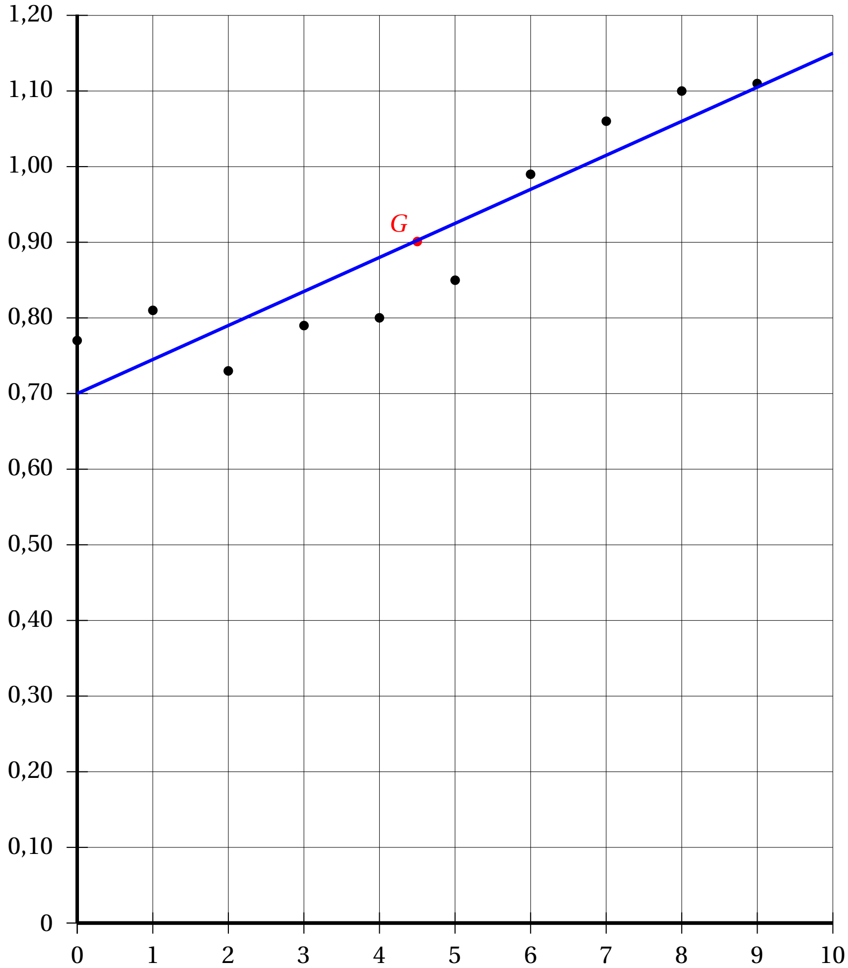
Corrigé du baccalauréat ES Antilles-Guyane
19 juin 2012

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. De 1998 à 2207, l'augmentation est de 0,34 € pour un prix initial de 0,77 €, soit une augmentation en pourcentage de $\dfrac{0,34}{0,77} \times 100 \approx 44,2\,\%$.

2. a)



b) Soit $G(\overline{x}\,;\,\overline{y})$.

$\overline{x} = \dfrac{0+1+2+3+4+5+6+7+8+9}{10} = 4,5$ et

$\overline{y} = \dfrac{0,77+0,81+0,73+0,79+0,80+0,85+0,99+1,06+1,10+1,11}{10} = \dfrac{9,01}{10} = 0,901$

3. La calculatrice donne $y = 0,045x + 0,7$ avec des coefficients arrondis au millième près.

4. 2010 correspond au rang 12. Donc une estimation prix est $0,045 \times 12 + 0,7 = 1,24$ €.

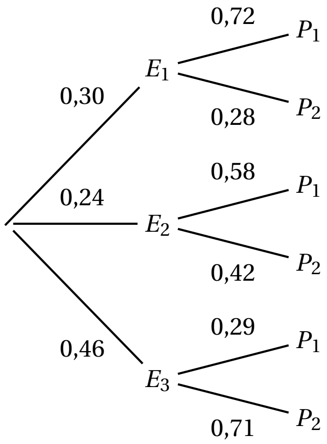
5. Le prix de 2007 augmenté de 30 % est : $1,11 \times \left(1 + \dfrac{30}{100}\right) = 1,11 \times 1,3 = 1,443$.

Il faut donc trouver le rang x tel que :

$0,045x+0,7 \geqslant 1,443 \iff 0,045x \geqslant 0,743 \iff x \geqslant \dfrac{0,743}{0,045}$ soit environ $x \geqslant 16,5$.
Il faut prendre $x = 17$ qui correspond à 2015.

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. On calcule $p(E_3 \cap P_1) = p(E_3) \times p_{E_3}(P_1) = 0,46 \times 0,29 = 0,1334$.

3. On a de même :
$p(E_2 \cap P_1) = p(E_2) \times p_{E_2}(P_1) = 0,24 \times 0,58 = 0,1392$.
$p(E_1 \cap P_1) = p(E_1) \times p_{E_1}(P_1) = 0,30 \times 0,72 = 0,216$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(P_1) = p(E_1 \cap P_1) + p(E_2 \cap P_1) + p(E_3 \cap P_1) = 0,216 + 0,1392 + 0,1334 = 0,4886$.

4. Il faut trouver $p_{P_1}(E_1) = \dfrac{p(P_1 \cap E_1)}{p(P_1)} = \dfrac{0,216}{0,4886} \approx 0,442$.

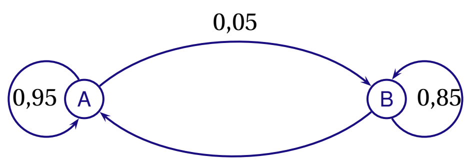
5. **a)** On na une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = p(P_1) = 0,4886$.
Les résultats favorables sont $P_1P_1\overline{P_1}$, $P_1\overline{P_1}P_1$, $\overline{P_1}P_1P_1$
La probabilité est donc égale à :

$$3 \times 0,4486^2 \times (1 - 0,4486) \approx 0,366.$$

b) L'évènement contraire : aucun client n'a pris le plat n° 1 a une probabilité de $(1 - 0,4486)^3 = 0,133746$ donc la probabilité qu'au moins un client ait pris le plat n° 1 est égale à $1 - 0,133746 \approx 0,866$.

Exercice 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.



La matrice de transition correspondante $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

2. On a $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,95 & 0,05\\ 0,15 & 0,85\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,55 & 0,45\end{pmatrix}$.

Ceci signifie qu'en 2011, 55 % des agents commerciaux avaient un véhicule de marque A et 45 % un véhicule de la marque B.

3. Les termes de M étant non nuls on sait que l'état P_n converge vers un état stable tel que $P = PM$, avec $P = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ et $x + y = 1$. D'où le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0,95x+0,15y\\ y & = & 0,05x+0,85y\\ x+y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,05x-0,15y & = & 0\\ -0,05x+0,15y & = & 0\\ x+y & = & 1\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0,05x-0,15y & = & 0\\ x+y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 5x-15y & = & 0\\ x+y & = & 1\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3y\\ x+y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3y\\ 4y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0,75\\ y & = & 0,25\end{array}\right.$$

L'état sable du système est $P = \begin{pmatrix}0,75 & 0,25\end{pmatrix}$. À terme 75 % des agents commerciaux auront un véhicule de type A et les autres un véhicule du type B.

4. a) Avec $P_n = \begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$, on a bien sûr $a_n + b_n = 1$.

b) Comme $P_{n+1} = P_n \times M$ on en déduit :

$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,95 & 0,05\\ 0,15 & 0,85\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,95a_n + 0,15b_n & 0,05a_n + 0,85b_n\end{pmatrix}$.

Donc en particulier : $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,15b_n$ et $a_n + b_n = 1$, donc :

$a_{n+1} = 0,95a_n + 0,15(1—a_n) = 0,8a_n + 0,15$.

Pour tout naturel n non nul, $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,15$.

5. a) Pour tout naturel n, $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,75 = 0,8a_n + 0,15 - 0,75 = 0,8a_n - 0,6 = 0,8\left(a_n - \frac{0,6}{0,8}\right) = 0,8(a_n - 0,75) = 0,8u_n$.

Cette dernière égalité montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = -0,25$.

b) On sait que $u_n - 0,25 \times 0,8^n$ et comme $u_n = a_n - 0,75 \iff a_n = u_n + 0,75$, on a finalement :

$a_n = 0,75 - 0,25 \times 0,8^n$.

c) Comme $0 < 0,8 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0,75.$$

On retrouve le résultat de la question 3.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On lit sur la figure : $f'(1) = \dfrac{-3}{3} = -1$. Réponse **c.**

2. u est définie pour $f(x) > 0$, donc sur $]-2~;~0[$. Réponse **b.**

3. On sait que $F'(x) = f(x)$, donc F est décroissante quand sa dérivée $f(x)$ est négative soit sur $[0~;~2]$. Réponse **c.**

4. Sur $[-1~;~0]$ la fonction f est positive, donc l'intégrale est égale à l'aire, en unités d'aire de la surface comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équation $x = -1$ et $x = 0$. On voit que cette aire vaut à peu près la moitié d'un rectangle de côtés 1 et 3, donc de 3 unités d'aire. Donc $I \approx 1,5$. Réponse **c.**

Exercice 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. On lit $g(0) = 7$.

2. On a donc $g'(0) = \dfrac{-2,8-7}{4-0} = \dfrac{-9,8}{4} = -2,45$.

3. On sait que la droite dont une équation est $y = 0$ est asymptote au voisinage de plus l'infini à C, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. a) Posons $u(x) = \text{e}^{bx} + 1$; on a $u'(x) = b\text{e}^{bx}$.

Or $g'(x) = -\dfrac{au'(x)}{(u(x))^2} = -\dfrac{ab\text{e}^{bx}}{\left(\text{e}^{bx}+1\right)^2}$.

b) On a vu que $g(0) = 7$, soit $\dfrac{a}{\text{e}^0+1} = 7 \iff \dfrac{a}{2} = 7 \iff a = 14$.

On a vu que $g'(0) = -2,45$, soit $-\dfrac{ab\text{e}^0}{\left(\text{e}^0+1\right)^2} = -2,45$ ou en tenant compte de $a = 14$,

$-\dfrac{14b}{4} = -2,45 \iff 7b = 4,9 \iff b = \dfrac{4,9}{7} = 0,7$.

Conclusion : sur $[0 ; +\infty[$, $g(x) = \dfrac{14}{\text{e}^{0,7x}+1}$.

Partie B

1. On a $g(3) \approx 1,527$ centaines d'objets soit environ 153 objets.

2. Il faut résoudre l'équation : $\dfrac{14}{\text{e}^{0,7x}+1} = 3,5 \iff \dfrac{2}{\text{e}^{0,7x}+1} = 0,5 \iff \dfrac{4}{\text{e}^{0,7x}+1} = 1 \iff 4 = \text{e}^{0,7x}+1 \iff 3 = \text{e}^{0,7x} \iff 0,7x = \ln 3 \iff x = \dfrac{\ln 3}{0,7} \approx 1,569$ soit environ 157 €.

3. a) $f(x) = g(x) \iff \text{e}^{0,7x} - 1 = \frac{14}{\text{e}^{0,7x}+1} \iff \left(\text{e}^{0,7x}-1\right)\left(\text{e}^{0,7x}+1\right) = 14$ (on reconnaît l'identité $a-b)(a+b) = a^2-b^2$) $\iff \left(\text{e}^{0,7x}\right)^2 - 1 = 14 \iff \left(\text{e}^{0,7x}\right)^2 - 15 = 0 \iff \left(\text{e}^{0,7x}+\sqrt{15}\right)\left(\text{e}^{0,7x}-\sqrt{15}\right) = 0 \iff \begin{cases} \text{e}^{0,7x}+\sqrt{15} = 0 & \text{ou} \\ \text{e}^{0,7x}-\sqrt{15} = 0 \end{cases}$

La première équation $\text{e}^{0,7x} = -\sqrt{15}$ n'a pas de solution car une exponentielle ne prend que des valeurs supérieures à zéro.

La seconde donne $\text{e}^{0,7x} = \sqrt{15} \iff 0,7x = \ln\sqrt{15} \iff x = \dfrac{\ln\sqrt{15}}{0,7} \approx 1,93$.

L'offre est égale à la demande pour environ 193 objets produits.

b) D'après la question précédente $f(1,93) \approx g(1,93)$.

Or $f(1,93) \approx 2,861$ et $g(1,93) \approx 2,880$.

En prenant une valeur plus précise de la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ soit $x \approx 1,934\,32$, on trouve :

$f(1,934\,32) \approx 2,872\,98$ et $g(1,934\,32) \approx 2,872\,99$.

Donc au prix d'équilibre 287 objets sont venus pour un chiffre d'affaires de $287 \times 193 = 55\,391$ €.