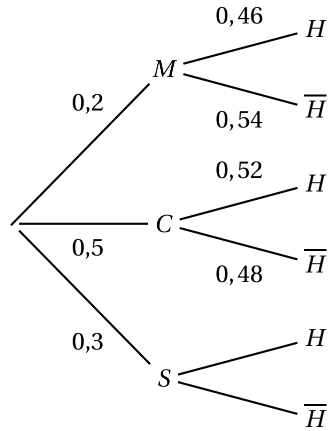
Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES Antilles-Guyane 20 juin 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Nous pouvons représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. **a.** $M \cap P$ est l'évènement suivant : « l'acquéreur a choisi la pose de moquette et a choisi la pose de papier peint ».

 b. $p(M \cap P) = p(M)p(P/M) = 0,2 \times 0,46 = 0,092$

3. **a.** — Comme le système $\{M, C, S\}$ est un système complet d'évènements, d après la formule des probabilités totales, si l'on note $x = p(P/S)$ on a :
 $p(P) = p(M \cap P) + p(C \cap P) + p(S \cap P)$
 $= p(M)p(P/M) + p(C)p(P/C) + p(S)p(P/S)$
 $= 0,2 \times 0,46 + 0,5 \times 0,52 + 0,3x$
 Or $p(P) = 0,427$. Donc $0,2 \times 0,46 + 0,5 \times 0,52 + 0,3x = 0,427$ d'où $0,3x = 0,427 - 0,092 - 0,26$ donc $0,3x = 0,427 - 0,352$ d'où $0,3x = 0,075$. Par conséquent, $x = 0,25$

 — La probabilité que l'acquéreur ait choisi la pose de sol plastifié et de papier peint est $p(S \cap P) = p(S)p(P/S) = 0,3 \times 0,25 = 0,075$

 b. $p(P/S) = \dfrac{p(P \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,075}{0,3} = 0,25$

4. On interroge au hasard et de façon indépendante trois acquéreurs parmi tous les clients du constructeur. On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli :
 — $n = 3$ épreuves répétées, identiques et indépendantes. Au cours de chacune d'elles on a
 — soit un succès : « choisir le papier peint » avec comme probabilité $p = p(P) = 0,427$
 — soit un échec : « choisir la peinture » avec comme probabilité
 $q = 1 - p = 1 - p(P) = 1 - 0,427 = 0,573$
 — alors la variable aléatoire X : « le nombre de succès » suit la loi binomiale $B(n, p) = B(3\,;\,0,427)$
 — alors l'ensemble des valeurs prises par X est $X < \Omega >= \{0;1;2;3\}$ et $\forall k \in X < \Omega >$ on a :
 $p([X = k]) = \dbinom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$
 — On rappelle que $\dbinom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles (ou de parties ou de combinaisons)
 k éléments que l'on peut extraire d'un ensemble n éléments et que $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

a. L'évènement contraire de au moins un des trois acquéreurs ait choisi le papier peint » est « aucun des trois acquéreurs n'a chois le papier peint » donc

$p_1 = p($« au moins un des trois acquéreurs ait choisi le papier peint »$) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} p^0(1-p)^{3-0} = 1p^0(1-p)^3 = (1-p)^3 = 0,573^3 = 0,188$

b. $p_2 = p($« exactement deux des trois acquéreurs ait choisi le papier peint »$) = p(X = 2) = \binom{3}{2} p^2(1-p)^{3-2} = 3p^2(1-p) = 3(0,427)^2(0,573) = 0,313$

EXERCICE 2

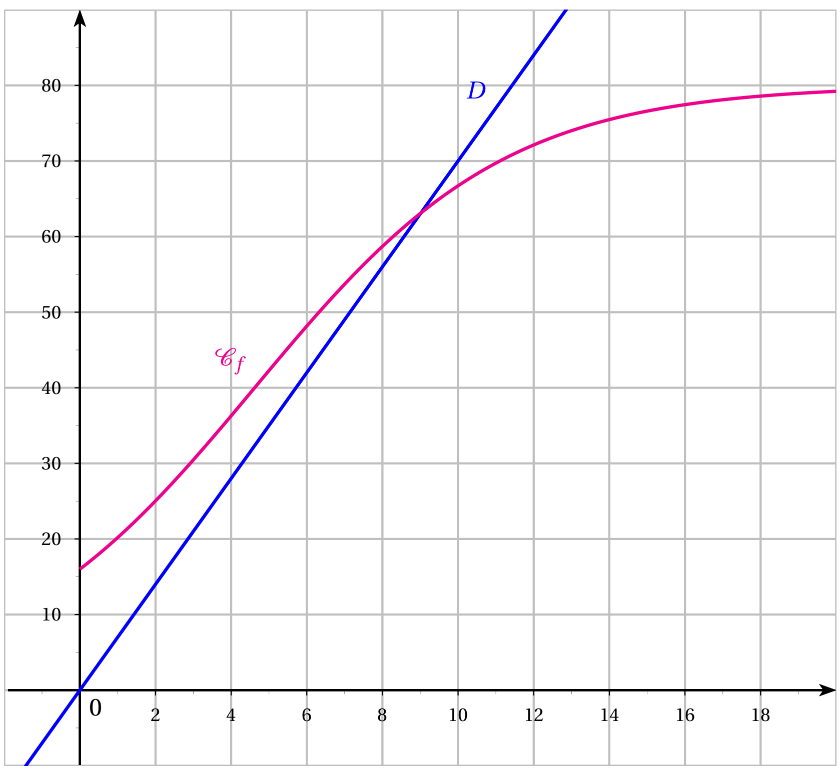
Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction dérivable définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{80}{1+4\text{e}^{-0,3x}}.$$

Dans un repère orthogonal, on note C_F la courbe représentative de la fonction f et D la droite d'équation $y = 7x$.

On admet que la courbe C_f et la droite D se coupent en un seul point d'abscisse x_0 et on donne $x_0 \approx 9,02$



1. — $f(0) = \dfrac{80}{1+4\text{e}^{-0,3\times 0}} = \dfrac{80}{1+4\text{e}^{0}} = \dfrac{80}{1+4\times 1} = \dfrac{80}{5} = 16$

— $f(20) = \dfrac{80}{1+4\text{e}^{-0,3\times 20}} = \dfrac{80}{1+4\text{e}^{-6}} \approx 79,21$

2. — f est le quotient de $x \longmapsto 80$ et de $x \longmapsto 1+4\text{e}^{-0,3x}$

— $x \longmapsto 80$ est constante donc dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0~;~+\infty[$

— $x \longmapsto 1+4\text{e}^{-0,3x}$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0~;~+\infty[$ car $\text{e}^{-0,3x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

— $x \mapsto 1+4\text{e}^{-0,3x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0~;~+\infty[$
— Par conséquent f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$

Alors en utilisant les formules suivantes $(\dfrac{1}{u})' = -\dfrac{u'}{u^2}$ et $(\text{e}^u)' = u'\text{e}^u$ donc $\forall x \in [0~;~+\infty[$ on a :

$f'(x) = 80 \times \dfrac{-4(-0,3\text{e}^{-0,3x})}{(1+4\text{e}^{-0,3x})^2} = \dfrac{96\text{e}^{-0,3x}}{(1+4\text{e}^{-0,3x})^2} > 0$ puisque car
$\text{e}^{-0,3x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $(1+4\text{e}^{-0,3x})^2 > 0$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$

3. a. — $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$
— $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} N(x) = 80$
— $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} D(x) = 1$ puisque $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \text{e}^{-0,3x} = 0$ car $\displaystyle\lim_{X \mapsto +\infty} -0,3x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X \mapsto -\infty} \text{e}^X = 0$
— donc $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 80$

On en déduit que la courbe C_f admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$, la droite d'équation $y = 80$

b. $\text{e}^{-0,3x} > 0$ donc $4\text{e}^{-0,3x} > 0$ d'où $1+4\text{e}^{-0,3x} > 1$. Par conséquent
$\dfrac{1}{1+4\text{e}^{-0,3x}} < 1$ donc $\dfrac{80}{1+4\text{e}^{-0,3x}} < 80$.
On a donc démontré que pour tout x appartenant $[0~;~+\infty[$ on a
$f(x) < 80$. On en déduit que la courbe C_f reste toujours en dessous de la droite d'équation $y = 80$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

c. À l'aide du graphique, on peut déterminer, selon les valeurs de x le signe de $7x - f(x)$ pour x appartenant l'intervalle $[0~;~+\infty[$

x	0	x_0		$+\infty$
D	est en dessous de C_f	coupe C_f	est au dessus de C_f	
$7x - f(x)$	$-$	0	$+$	

Partie B : Interprétation économique

1. Le montant des « coûts fixes » c'est-à-dire le montant des coûts lorsque la quantité produite est nulle est $f(0) = 16$ centaines d'euros = 1 600 euros
2. Le coût total de production des thermomètres ne peut atteindre 8 100 euros par jour car pour tout x appartenant $[0~;~+\infty[$ on a $f(x) < 80$ centaines d'euros.
3. Le prix de vente d'un thermomètre est fix 7 euros. La recette journalière, exprimée en centaines d'euros, est donc donnée par $R(x) = 7x$.
L'entreprise ralise un bénéfice lorsque $7x > f(x)$ c'est-à-dire $7x - f(x) > 0$ c'est-à-dire $x > x_0 \approx 9,02$ centaines de thermomètres c'est--dire $x > 902$ thermomètres.

EXERCICE 3

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale.
Elle s'engage, terme, rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.
En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.
Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5% par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.
Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2007+n)$. On a donc $r_0 = 40000$.

1. **a.** — $r_1 = r_0 - \dfrac{5}{100}r_0 + 200 = \dfrac{95}{100}r_0 + 200 = 0,95r_0 + 200 = 0,95(40\,000) + 200 = 38\,200$
   — $r_2 = r_1 - \dfrac{5}{100}r_1 + 200 = \dfrac{95}{100}r_1 + 200 = 0,95r_1 + 200 = (0,95)(38\,200) + 200 = 36\,490$

   b. Comme l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5% par rapport la quantité rejetée l'année précédente et qu'elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an, alors pour tout entier naturel n on a : $r_{n+1} = r_n - \dfrac{5}{100}r_n + 200 = 0,95r_n + 200$

2. Soit (s_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $s_n = r_n - 40\,000$

   a. $s_{n+1} = r_{n+1} - 40\,000 = 0,95r_n + 200 - 40\,000 = 0,95r_n - 3800 = 0,95(r_n - 40\,000) = 0,95s_n$ donc la suite (s_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme
   $s_0 = r_0 - 40\,000 = 40000 - 4000 = 36000$

   b. Alors pour tout entier naturel n, $s_n = (0,95)^n s_0 = 36000\ (0,95)^n$.
   Donc $r_n = s_n + 40\,000 = 36000\ (0,95)^n + 40\,000$

   c. $r_{n+1} - r_n = 36\,000\ (0,95)^{n+1} + 40\,000 - (36\,000\ (0,95)^n + 40\,000) = 36\,000(0,95)^n(0,95-1) < 0$ donc la suite (r_n) décroît. Par conséquent, la quantité de déchets rejetée diminue d'une année sur l'autre.

   d. Comme $-1 < 0,95 < 1$ alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(0,95)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} r_n = 40\,000$

   e. En $2011 = 2007+4$, une estimation, en tonnes et une tonne près, de la quantité de rejets est $r_4 = 36\,000\ (0,95)^4 + 40\,000 \approx 33\,322,2 \approx 33\,322$ tonnes

3. Résolvons l'inéquation suivante d'inconnue $n \in \mathbb{N}$

   $r_n < 30000 \iff 36000\ (0,95)^n + 4\,000 < 30000 \iff 36\,000\ (0,95)^n < 26\,000 \iff (0,95)^n < \dfrac{26\,000}{36\,000}$

   $\iff (0,95)^n < \dfrac{26}{36} \iff \ln\left((0,95)^n\right) < \ln\left(\dfrac{26}{36}\right) \iff$

   $n\ln(0,95) < \ln\left(\dfrac{26}{36}\right) \iff n > \dfrac{\ln\left(\frac{26}{36}\right)}{\ln(0,95)}$ car $\ln(0,95) < 0$ puisque $0 < 0,95 < 1$ Or $\dfrac{\ln\left(\frac{26}{36}\right)}{\ln(0,95)} \approx 6,34$
   Donc à partir de l'année $2007+7 = 2014$ l'entreprise réussira à respecter son engagement.

EXERCICE 4

f une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc est définie sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessus le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	-1	↗	$+\infty$

On donne de plus : $f(-2) = 0$; $f(5) = 0$ et $f(0) = 3$

À l'aide des informations fournies ci-dessus, répondre aux questions suivantes.

1. On peut donc compléter le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		3		5		10		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit le tableau de signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. a. Comme $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x) = 1$ alors la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale la droite d'équation $y = 1$.

b. — f est continue sur l'intervalle $[3~;~10]$ car elle y est dérivable puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

— f est strictement croissante sur l'intervalle $[3~;~10]$

— Donc f réalise une bijection de l'intervalle $I = [3~;~10]$ sur l'image de cet intervalle par f qui est l'intervalle $J = [-1~;~3]$

— Par conséquent, tout réel y de J admet un unique antécédent pour f dans l'intervalle I

— Or $2 \in J$ donc 2 admet un unique antécédent pour f dans l'intervalle I

— Par conséquent, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[3~;~10]$

c. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f y admet une primitive F. Donc

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
donc $F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

3. On note g la fonction définie sur $]-\infty~;~-2[\cup]5~;~+\infty[$ par $g(x) = \ln(f(x))$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a. $g(x) = \ln(f(x))$ existe lorsque $f(x)$ existe et $f(x) > 0$ c'est-à-dire lorsque $x \in]-\infty~;~-2[\cup]5~;~+\infty[$ donc la fonction g n'est pas définie sur l'intervalle $[-2~;~5]$

b. — $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} g(x) = +\infty$ car

— $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) = +\infty$

— $\lim\limits_{X\mapsto +\infty} \ln(X) = +\infty$

— $\lim\limits_{x\mapsto 5^+} g(x) = -\infty$ car

— $\lim\limits_{x\mapsto 5^+} f(x) = 0^+$

— $\lim\limits_{X\mapsto 0^+} \ln(X) = -\infty$

c. Comme ln est une fonction croissante alors

— sur $]-\infty\,;\,-2[$ $g = \ln\ o\ f$ décroît car f y est décroissante

— sur $]5\,;\,+\infty[$ $g = \ln\ o\ f$ croît car f y est croissante

x	$-\infty$		-2		5		10		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$\ln(f(x))$	0	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(3)$	$\nearrow$	$+\infty$