Correction TES Antilles–Guyane 18 juin 2010

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1re partie *Étude préliminaire de f*

1. La droite d'équation $y = -2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2.}$
2. $\boxed{\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ a pour unique solution } 3.}$
3. $f(x)$ est strictement positif sur $[1~;~3[$ et $f(x)$ est strictement négative sur $]3~;~+\infty[$.

2e partie *Étude d'une fonction composée*

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par $g(x) = \exp(f(x))$.

1. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \mathrm{e}^{-2}.}$
2. L'équation $g(x) = 1$ équivaut à $f(x) = \ln 1$ c'est à dire $f(x) = 0$. Elle a donc pour unique solution 3 d'après la partie 1.

3e partie

La fonction f est la dérivée d'une fonction F définie sur $[1~;~+\infty[$.

1. La fonction F a pour dérivée la fonction f qui est positive sur $[1~;~3[$ et négative sur $]3~;~+\infty[$. La fonction F est donc croissante sur $[1~;~3]$ et décroissante sur $[3~;~+\infty[$ c'est donc la courbe n°2.
2. On lit que $\boxed{F(2) \approx 0,5 \text{ et } F(3) \approx 2}$.
3. L'aire du domaine du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 3$ est donnée par l'intégrale :

$$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_2^3 = F(3) - F(2) \approx 2 - 0,5 = 1,5$$

$$\boxed{\text{L'aire du domaine vaut environ 1,5 unité d'aire}}$$

4e partie

On donne l'expression de la fonction f définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-x+3} - 2.$$

Une primitive de f est la fonction F définie par $F(x) = -2\mathrm{e}^{-x+3} - 2x$.

L'aire du domaine est donnée par l'intégrale :

$$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = \left[-2\mathrm{e}^{-x+3} - 2x\right]_2^3 = (-2\mathrm{e}^0 - 2 \times 3) - (-2\mathrm{e}^1 - 2 \times 2) = 2\mathrm{e} - 4 \approx 1,44$$

$$\boxed{\text{L'aire du domaine vaut } 2\mathrm{e} - 4 \text{ soit environ 1,44 unité d'aire}}$$

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *Tableau*

	Sphérique	Équilibrée	Baroque	Total
Argentée	9 %	21 %	30 %	60 %
Noire	7 %	23 %	10 %	40 %
Total	16 %	44 %	40 %	100 %

2. **a.** D'après le tableau $p(B) = 0,4$,

$\boxed{\text{La probabilité que le bijoutier choisisse une perle de forme baroque est de 0,4}}$

b. D'après le tableau $p(N \cap E) = 0,23$,

$\boxed{\text{La probabilité que le bijoutier choisisse une perle noire de forme équilibrée est de 0,23}}$

c. D'après le tableau $p(A \cap B) = 0,3$,

$\boxed{\text{La probabilité que le bijoutier choisisse une perle argentée de forme baroque est de 0,3.}}$

d. On a $p_B(\overline{A}) = \dfrac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25$.

Si le bijoutier a choisi une perle de forme baroque, la probabilité qu'elle ne soit pas argentée est de 0,1

3. Pour une création de bijou original, le bijoutier choisit dans son stock quatre perles au hasard et de manière indépendante. On admet que le nombre de perles est suffisamment grand pour que le choix d'une perle soit assimilé à un tirage avec remise.

a. Les tirages étant indépendants, la probabilité que les quatre perles ne soient pas argentées est :

$$\left(p(\overline{A})\right)^4 = 0,4^4 = 0,0256$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'aucune des quatre perles choisies ne soit argentée est de 0,0256.}}$

b. L'évènement contraire de « il y ait au moins une perle sphérique parmi les quatre perles choisies »est « Aucune des quatre perles choisies n'est sphérique ».

$$1 - \left(p(\overline{S})\right)^4 = 1 - 0,84^4 \approx 0,502$$

La probabilité qu'il y ait au moins une perle sphérique parmi les quatre perles choisies est de 0,502.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie 1

1. Le taux d'augmentation du nombre de spectateurs de 1997 à 1999 est donné par le calcul suivant :

$$\frac{153{,}6-149{,}3}{149{,}3}=\frac{153,6}{149,3}-1$$

2. En supposant que le nombre de spectateurs augmente de 1 % tous les ans, à partir de 2007, le nombre de spectateurs en 2010 est donné par le calcul suivant :

$$1{,}01^3\times 177{,}9$$

3. Entre 1997 et 2007 , l'augmentation annuelle moyenne, en pourcentage, du nombre de spectateurs est, arrondie à 0,01 % :

$$\left(\frac{177,9}{149,3}\right)^{\frac{1}{10}}-1\approx 0,0177=1{,}77\ \%$$

4. Sachant que de 1998 à 1999, le nombre de spectateurs (en millions) dans les cinémas en France a diminué de 10 %, le nombre de spectateurs (en millions) en 1998 arrondi au dixième était :

$$\frac{153,6}{1-0,1}\approx 170{,}7$$

5. On considère un nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$, pour $1\leqslant i\leqslant 6$, construit à partir des données du tableau donné en début d'exercice. Les coordonnées du point moyen de ce nuage sont :

$$(5\ ;\ 169{,}55)$$

6. **a.** L'équation de la droite de régression de y en x est $y=2,8x+155,6$
Le nombre de spectateurs sera d'environ 200 millions en :

$$2013$$

b. L'estimation (en millions) arrondi au dixième, du nombre de spectateurs en 2015 est :

$$206$$

Partie 2

Justifier la réponse donnée à la question 3 de la partie 1.

Si on appelle t_m le taux annuel moyen entre 1997 et 2007 et comme il s'est écoulé 10 années, on a :

$$\begin{aligned}
(1+t_m)^{10} &= \frac{177,9}{149,3}\\
1+t_m &= \left(\frac{177,9}{149,3}\right)^{\frac{1}{10}}\\
t_m &= \left(\frac{177,9}{149,3}\right)^{\frac{1}{10}}-1\\
t_m &\approx 0,0177=1,77\%
\end{aligned}$$

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. La f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ et pour tout réel $x \in [0\ ;\ 20]$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0,3 - \frac{0,9}{x+1} \\ f'(x) &= \frac{0,3x - 0,6}{x+1} \\ f'(x) &= \frac{0,3(x-2)}{x+1} \end{aligned}$$

Sur $[0\ ;\ 20]$, $x+1$ est toujours positif donc $f'(x)$ a le même signe que $x-2$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		2		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1,5$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(20)$

$f(2) = 2,1 - 0,9\ln 3 \approx 1,11$ et $f(20) = 7,5 - 0,9\ln 21 \approx 4,76$

2. **a.** g est continue, strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 17]$ or $g(0) = -1,5$ et $g(17) = 0,9\ln 18 - 2,35 \approx 0,25$ donc 0 appartient à l'intervalle image par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel x_0 dans l'intervalle $[0\ ;\ 17]$ tel que $g(x_0) = 0$.

A l'aide de la calculatrice on trouve que : $g(6,66) \approx -0,0006$ et $g(6,67) \approx 0,00008$ donc

$$6,66 < x_0 < 6,67$$

b. *Tableau de variation de g*

x	0	x_0	17		20
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(0)$	$\nearrow$ 0	$g(17)$	$\searrow$	$g(20)$

En utilisant le tableau de variation de g et en remarquant que $g(20)$ est positif, on peut en déduire le signe de g :

x	0		x_0		20
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. **a.** On a $C(0) = 1,5$, les coûts fixes s'élèvent à 1,5 million d'euros.

   b. Nous avons vu dans la partie A que la fonction f admettait un minimum pour $x = 2$.

   Le promoteur doit prévoir de construire deux maisons pour que le coût de production soit minimal.

2. **a.** Le bénéfice réalisé pour la fabrication de n maisons est :

$$\begin{aligned} B(n) &= 0,25n - C(n) \\ &= 0,25n - (0,3n + 1,5 - 0,9\ln(n+1)) \\ &= -0,05n - 1,5 + 0,9\ln(n+1) \end{aligned}$$

   b. On remarque que la fonction B n'est autre que la fonction g de la partie A et nous avons vu qu'elle admet un maximum pour $x = 17$.

   Le promoteur doit prévoir de construire 17 maisons pour que le bénéfice soit maximal.

   Nous avons $g(17) \approx 0,2513$. Ce bénéfice sera de 251 300 €

   c. Le signe de g étudié dans la partie A nous permet de dire que

   Il faut construire au minimum 7 maisons pour que le promoteur ne travaille pas à perte.

   d. En utilisant la table de la calculatrice, on peut remarquer que $g(x) > 0,2$ lorsque $x > 11,6$. À partir de 12 maisons construites le bénéfice du promoteur est supérieur à 200 000 euros.