꧁ Corrigé du baccalauréat ES Antilles–Guyane ꧂ juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

PARTIE A : aucune justification n'est demandée

1. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\lim\limits_{X \to -\infty} X\mathrm{e}^{X} = 0$, donc par composition en posant $X = -x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} -x\mathrm{e}^{-x} = 0$.
   Puisque $f(x) = -x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
2. Puisque $\mathrm{e}^{-x} >$ quel que soit x, $f(x) = 0 \iff -x + 2 = 0 \iff x = 2$. Une seule solution.
3. Un e équation de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.
   Or $f(0) = 2\mathrm{e}^{-0} = 2$. D'autre part $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (-x+2)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(-1 + x - 2) = \mathrm{e}^{-x}(x - 3)$. Donc $f'(0) = -3$.
   L'équation de la tangente est donc : $y - 2 = -3(x - 0) \iff y = -3x + 2$.
4. On a vu que sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-3)$. Le signe de la dérivée est celui de $(x-3)$, d'où :
   si $x < 3$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante ;
   si $x > 3$, $f'(x) >$: la fonction est croissante.
   $f(3)$ est donc le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$ et $f(3) = (-3+2)\mathrm{e}^{-3} = -\mathrm{e}^{-3} = \dfrac{-1}{\mathrm{e}^3}$.

PARTIE B : la réponse devra être justifiée.

Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$d(x) = f(x) - (-x+2) = (-x+2)\mathrm{e}^{-x} - (-x+2) = (-x+2)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)$.
On a $\mathrm{e}^{-x} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{-x} > 1 \iff -x > \ln 1 \iff x < 0$ et
$\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0 \iff \mathrm{e}^{-x} < 1 \iff -x < \ln 1 \iff x > 0$.
Le signe de $d(x)$ s'obtient par un tableau des signes de chacun de ses facteurs :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$(-x+2)$		$+$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{e}^{-x} - 1$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc sur $]-\infty~;~0[$ et sur $]2~;~+\infty[$, $d(x) > 0 \iff f(x) > -x+2$: ceci signifie que la courbe est au dessus de la droite Δ ;
sur $]0~;~2[$, $d(x) < 0 \iff f(x) < -x+2$: la courbe est au dessous de la droite Δ ;
pour $x = 0$ et pour $x = 2$ la droite et la courbe ont un point commun.

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.
Partie A

1. On a $f(1) = 1$.
   $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente en A ; il est égal à $\dfrac{0-1}{2-1} = -1$; $f'(1) = -1$.
   $f'(2) = 0$ (énoncé : tangente horizontale pour $x = 2$).
2. $$f(x) = ax + b + c\ln x$$

   a. $f'(x) = a + c \times \dfrac{1}{x} = a + \dfrac{c}{x}$.

   b. Les trois résultats de la question **1.** se traduisent par le système :
   $\left\{\begin{array}{rcl} f(1) & = & 1 \\ f'(1) & = & -1 \\ f'(2) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b+0 & = & 1 \\ a+c & = & -1 \\ a+\frac{c}{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ a+c & = & -1 \\ 2a+c & = & 0 \end{array}\right.$.

   c. On termine la résolution du système :
   $\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ a+c & = & -1 \\ 2a+c & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ a+c & = & -1 \\ a & = & 1 \end{array}\right.$ puis $c = -2$ et enfin $b = 1 - a = 0$.
   Donc $f(x)x - 2\ln x$.

Partie B

$$f(x) = x - 2\ln x.$$

1. On a $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$: l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de f au voisinage de zéro.
2. **a.**
   $$g(x) = x\ln x - x.$$

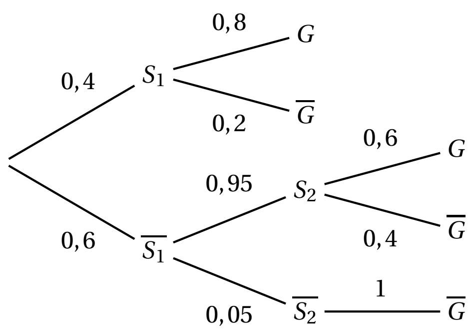
   On a $g'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.
   La fonction g est donc une primitive de la fonction logarithme népérien de x.

   b. Une primitive de $x \longmapsto x$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$, donc une primitive de la fonction f est la fonction F définie par :
   $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2(x\ln x - x)$.

   c. La fonction f est positive sur l'intervalle $[1~;~\mathrm{e}]$, donc l'aire de la surface du domaine est égale à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(1) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - 2(\mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \mathrm{e}) - \left[\dfrac{1^2}{2} - 2(1\ln 1 - 1)\right] = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - 2\mathrm{e} + 2\mathrm{e} - \dfrac{1}{2} - 2 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{5}{2} \approx 1,2$. (ce que l'on peut vérifier sur la figure)

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1.



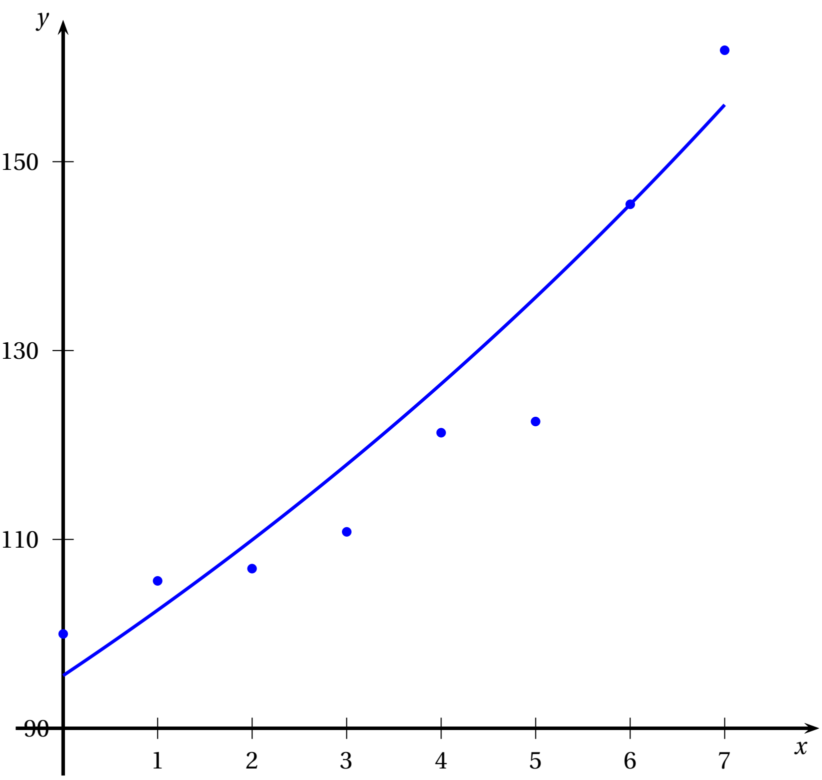
2. $p(S_1 \cap G) = p(S_1) \times p_{S_1}(G) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$.
3. On a $p(G) = p(S_1 \cap G) + p\left(\overline{S_1} \cap S_2 \cap G\right) = 0,32 + 0,6 \times 0,95 \times 0,6 = 0,32 + 0,342 = 0,662$.
4. On a $p_G(S_1) = \dfrac{p(S_1 \cap G)}{p(G)} = \dfrac{0,32}{0,662} \approx 0,4883$ soit 0,483 au millième près.
5. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 4$ et $p = p(G) = 0,662$.
   La probabilité que le joueur Naderer gagne quatre échanges consécutifs est égale à :
   $0,662^4 \approx 0,1920$ soit environ 0,192 au millième près.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie 1 : Un ajustement affine est-il possible ?

1.



2. Les 6 premiers points sont sensiblement alignés mais pas les deux derniers.

Partie 2 : On essaie un autre ajustement

1.

x_i, $0 \leqslant i \leqslant 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$, $0 \leqslant i \leqslant 7$	4,61	4,66	4,67	4,71	4,80	4,89	4,98	5,09

2. **a.** La calculatrice donne avec des coefficients arrondis au centième : $z = 0,07x + 4,56$.

b. On a $z = \ln y = 0,07x + 4,56 \iff y = \mathrm{e}^{0,07x+4,56} = \mathrm{e}^{0,07x} \times \mathrm{e}^{4,56}$.

Or $\mathrm{e}^{4,56} \approx 95,58 \approx 95,6$ au dixième près.

Donc $y = 95,6\mathrm{e}^{0,07x}$

c. Voir ci-dessus.

d. 2009 correspond au rang $x = 9$, donc on peut estimer le chiffre d'affaires en 2009 à :

$95,6 \times \mathrm{e}^{0,07\times 9} = 95,6 \times \mathrm{e}^{0,63} \approx 179,5$

Partie 3 : Ce nouvel ajustement permet-il de prévoir l'avenir ?

Le modèle exponentiel est un système de croissance ; s'il y a une baisse de l'activité ce modèle ne sera pas valable après 2008.

EXERCICE 4 **4 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Il y a une chaîne contenant tous les sommets : B-F-D-E-C-A par exemple, donc le graphe est connexe.
2. Il y a exactement deux sommets de degré impair A et F. Comme le graphe est connexe il existe une chaîne eulérienne partant de l'un des deux et finissant à l'autre, par exemple la chaîne A-B-C-D-E-F
3. Comme il existe deux sommets de degré impair il n'existe pas de cycle eulérien.

   Pour que tous les sommets soient de degré pair il suffit de rajouter un chemin de A à F. On aura alors un cycle eulérien.
4. Soit c le nombre chromatique ; comme le plus haut degré est 4 on a $c \leqslant 5$.

   Mais le sous-graphe {A ; B ; C} est complet, donc $c \geqslant 3$.

   Conclusion : $3 \leqslant c \leqslant 5$.
5. On utilise l'algorithme de Welsh : on part de sommets de plus haut degré par exemple B et D à qui on donne la même couleur, on donne une seconde couleur à C et F et enfin une troisième couleur à A et E.

   On peut donc faire une coloration à trois couleurs : le nombre chromatique est égal à 3.
6. On a $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Le terme correspondant à A et F est dans la première ligne et la sixième colonne ; il est égal à 5 nombre de chemins reliant A à F :

   A-B-E-F ; A-C-B-F ; A-C-D-F ; A-C-E-F ; A-D-E-F.