∽ Baccalauréat ES Amérique du Sud ∾
14 novembre 2012

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **3 points**
Commun à tous les candidats

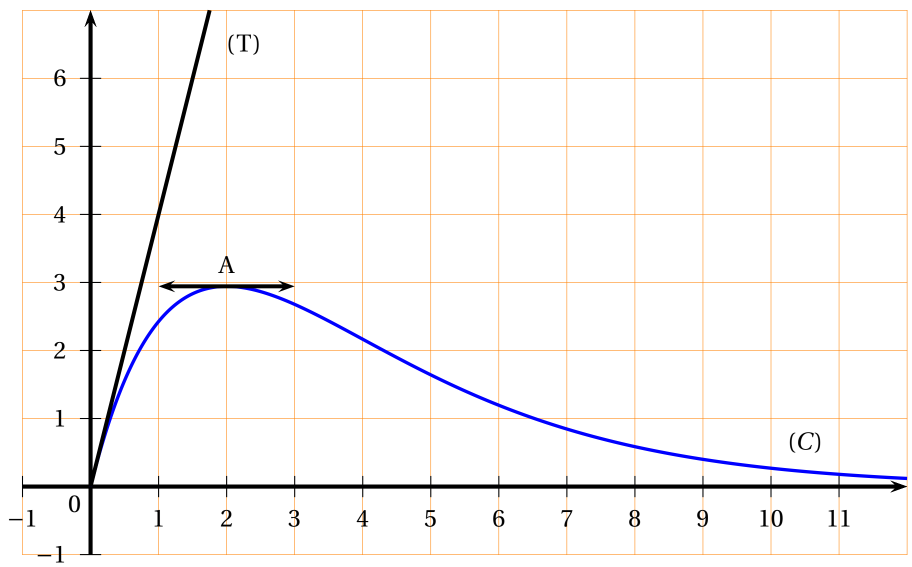
QCM *Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Le candidat portera sur sa copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte* 0,5 *point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.*

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative (C) d'une fonction définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$. On sait que :

— la courbe (C) passe par les points O(0 ; 0) et $\mathrm{A}\left(2~;~\dfrac{8}{\mathrm{e}}\right)$,
— la tangente à (C) en O est la droite (T) qui passe par le point de coordonnées (1 ; 4),
— la tangente à (C) en A est parallèle à l'axe des abscisses,
— l'axe des abscisses est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.



1. La limite de f en $+\infty$ est :

a. 0 **b.** $-\infty$ **c.** $+\infty$

2. Le nombre $f'(0)$ vaut :

a. -1 **b.** 0 **c.** 4

3. L'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions :

a. $[0~;~+\infty[$ **b.** $[0~;2]$ **c.** $[0~;2[$

Partie B

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$. La dérivée de la fonction g est :

a. $g'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$ **b.** $g'(x) = (1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$ **c.** $g'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

2. La valeur exacte de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ est :

a. $\dfrac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)$ **b.** $\mathrm{e}^{-2}-1$ **c.** $-\dfrac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2}\right)$

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$. La valeur moyenne de la fonction h sur $[1\,;\,3]$ est :

a. $\ln 3$ **b.** $\dfrac{2}{3}$ **c.** $\ln\left(\sqrt{3}\right)$

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne le nombre de licenciés à la fédération française de badminton.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de licenciés (y_i)	70 589	79 049	85 712	91 782	96 706	108 762	114 725	115 643	124 894	134 886

Sources : Fédération Française de Badminton

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation, arrondi à l'unité, du nombre de licenciés entre les années 2000 et 2009.

2. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ dans le plan (P) muni du repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, défini de la façon suivante :

— Sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on prendra 2 cm comme unité.

— Sur l'axe des ordonnées, on placera 70 000 à l'origine et on prendra 1 cm pour 5 000 licenciés.

3. **a.** À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients à l'unité.

b. En utilisant cet ajustement, calculer le nombre de licenciés que l'on peut prévoir en 2012.

4. On décide d'utiliser comme ajustement la courbe d'équation $y = k\mathrm{e}^{px}$. On suppose que cette courbe passe par les points $M(0\,;\,70589)$ et $N(9\,;\,134886)$. Déterminer les réels k et p (on arrondira p au millième).

5. On utilise comme ajustement dans cette question, la courbe d'équation $y = 70589\mathrm{e}^{0,072x}$.

Utiliser cet ajustement pour estimer le nombre de licenciés en 2012 que l'on donnera arrondi à l'unité.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pierre pratique la course à pied plusieurs fois par semaine. Il a trois parcours différents, notés A, B et C et deux types de séances d'entraînement : Endurance, notée E et Vitesse, notée V.
Chaque fois que Pierre va courir, il choisit un parcours (A, B ou C), puis un type d'entraînement (E ou V).

Si A et B désignent deux évènements d'une même expérience aléatoire, alors on notera $\overline{A}$ l'évènement contraire de A, $p(A)$ la probabilité de l'évènement A, et $p_A(B)$ la probabilité de l'évènement B sachant que A est réalisé, avec $p(A) \neq 0$.

Pierre va courir aujourd'hui. On considère les évènements suivants :
A : « Pierre choisit le parcours A »
B : « Pierre choisit le parcours B »
C : « Pierre choisit le parcours C »
E : « Pierre fait une séance d'endurance »
V : « Pierre fait une séance de vitesse »
On sait que :

— Pierre choisit le parcours A dans 30 % des cas et le parcours B dans 20 % des cas ;
— si Pierre choisit le parcours A, alors il fait une séance d'endurance dans 40 % des cas ;
— si Pierre choisit le parcours B, alors il fait une séance d'endurance dans 80 % des cas.

1. Faire un arbre de probabilité décrivant la situation ci-dessus.
2. **a.** Donner la valeur de $p_A(E)$.
   b. Calculer $p_B(V)$.
3. Déterminer la probabilité que Pierre choisisse le parcours C.
4. Déterminer la probabilité que Pierre choisisse le parcours A et une séance de vitesse.
5. On sait que $p(E) = 0,7$. Montrer que : $p(E \cap C) = 0,42$.
6. On sait que Pierre a choisi le parcours C. Quelle est la probabilité qu'il fasse une séance d'endurance ?

EXERCICE 3 **5 points**
Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un employé se rend à son travail en bus et, soit il n'est pas en retard, c'est-à-dire qu'il est à l'heure ou en avance, soit il est en retard.
Le 1^{er} jour, la probabilité que cet employé arrive en retard est de $0,2$.

Pour les jours suivants :

S'il est en retard un jour donné, alors la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $0,05$.
Si l'employé n'est pas en retard un jour donné, alors la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $0,2$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note

R_n l'évènement « l'employé est en retard à son travail le n-ième jour ».

H_n l'évènement « l'employé n'est pas en retard à son travail le n-ième jour ».

On note également, pour tout entier naturel n non nul :

- r_n la probabilité que l'employé soit en retard le n-ième jour,
- h_n la probabilité que l'employé ne soit pas en retard le n-ième jour,

- $P_n = (r_n \quad h_n)$ la matrice qui traduit l'état probabiliste au n-ième jour.

1. Déterminer l'état initial P_1.

2. **a.** Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.

b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.

3. Quelle est la probabilité que cet employé soit en retard le 3$^{\text{e}}$ jour. On donnera le résultat avec une valeur arrondie au centième.

4. Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable.

a. Montrer que x et y vérifient la relation $y = 0,95x + 0,8y$.

b. Déterminer l'état stable du système en arrondissant les valeurs au millième. Interpréter ces résultats.

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = 10\ln(x+1) - x.$$

Partie A

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

x	0		9		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f(9)$	↘	$f(10)$

1. Justifier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

2. Donner les valeurs de $f(9)$ et de $f(10)$ arrondies au centième.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 10$ admet dans l'intervalle $[0\,;\,9]$ une unique solution α. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

4. On considère la fonction F définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$F(x) = (10x+10) \times \ln(x+1) - 10x - \frac{x^2}{2}.$$

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

Partie B

Une entreprise fabrique des puces pour des téléphones portables. Le coût marginal pour une production de x centaines de puces $(0 \leqslant x \leqslant 10)$ est donné en centaines d'euros par :

$$f(x) = 10\ln(x+1) - x.$$

1. En utilisant la **partie A**, déterminer le nombre de puces que l'entreprise doit fabriquer pour que le coût marginal soit maximum.

2. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$, on note $C(x)$ le coût total de production, en centaines d'euros, de x centaines de puces.

On assimile le coût marginal à la dérivée du coût total, c'est-à-dire que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$, $C'(x) = f(x)$.

Les coûts fixes s'élèvent à 1 500 euros, c'est-à-dire que $C(0) = 15$.

Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$,

$$C(x) = (10x + 10) \times \ln(x+1) - 10x - \frac{x^2}{2} + 15.$$

3. Étudier le sens de variation de la fonction C sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.